

1 Черенковское излучение

Частица с начальной энергией E испускает фотон с энергией E_γ под углом θ , поворачивая на угол ϕ с конечной энергией E' . Из сохранения энергии-импульса:

$$\begin{aligned}E &= E' + E_\gamma \\p &= p' \cos \phi + p_\gamma \cos \theta \\0 &= p' \sin \phi + p_\gamma \sin \theta\end{aligned}$$

Свойства среды определяют

$$v_\gamma = \frac{c}{n} = \frac{\lambda_0 \nu}{n},$$

где λ_0 - длина волны в вакууме.

$$E_\gamma = p_\gamma v_\gamma = \frac{p_\gamma}{n}.$$

Используем также $E = \frac{p}{\beta}$, $E^2 = p^2 + m^2$.

Исключая из системы уравнений ϕ , получим:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} + \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{n^2 - 1}{2n^2}.$$

Второй член - учет торможения частицы за счет излучения. Здесь $\Lambda = h/p$ - де-Бройлевская длина волны частицы, λ - длина волны излучения в веществе. В видимой области спектра $\lambda \gg \Lambda$.

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

Условие $\cos \theta < 1$ означает $\beta n > 1$.

Отсюда:

- область частот ограничена $n > 1$
- пороговая скорость $\beta_c = 1/n$

При $\beta = \beta_c$ излучение вперед $\theta_{min} = 0$

При $\beta \rightarrow 1$ наиболее широкий конус $\theta_{max} = \arccos(1/n)$ (45° при $n = 1.41$).

Спектральная плотность числа фотонов на единицу длины (по Тамму-Франку)

$$\frac{d^2 N}{dl d\lambda} = 2\pi\alpha z^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\lambda)}\right) \frac{1}{\lambda^2}$$

Полное *среднее* число фотонов на единицу длины в спектральной полосе $\lambda_1 \div \lambda_2$

$$\frac{dN}{dl} = \int \frac{d^2N}{dl d\lambda} d\lambda = 2\pi\alpha z^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

(при $n(\lambda) = \text{const}$). Статистика числа фотонов - пуассоновская.

N.B.

$$\frac{dN}{d\lambda} \propto \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{dN}{d\omega} = \text{const}(\omega).$$

Примеры:

стекло	300 ÷ 600 нм	$N \approx 400$ фотонов/см
кварц	180 ÷ 600 нм	$N \approx 1000$ фотонов/см
воздух	300 ÷ 700 нм	$N \approx 1$ фотон/см (для воздуха при н.у. $n-1 = 2.9 \cdot 10^{-4}$)

N.B. Для определенного газа $n-1 \propto N \propto P/T$, где N - концентрация молекул.

Энергия излучения

$$\frac{dE}{dl} = \int \hbar\omega \frac{d^2N}{dl d\lambda} d\lambda \stackrel{n=\text{const}}{=} (2\pi)^2 \frac{\hbar c}{2n} \alpha z^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} \right).$$

Для воздуха (при $\beta \rightarrow 1$ и в диапазоне 100 нм ÷ ∞)

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dE}{dl} \right)_C \approx 0.013 \text{ МэВ} \cdot \text{см}^2/\text{г} \sim 1\% \text{ от } \frac{1}{\rho} \left(\frac{dE}{dl} \right)_I.$$

N.B. Потери энергии частицы на черенковское излучение - часть "ионизационных" потерь, учтенная в члене эффекта плотности.

При наличии дисперсии $n(\lambda) \neq \text{const}$ ширина конуса

$$d\theta_{disp} = \frac{1}{\beta n^2 \sin \theta} \frac{dn}{d\lambda} d\lambda.$$

При $\beta = 1$ в кварце $\Delta\theta_{disp} \approx 0.6^\circ$.

Дисперсия ограничивает достижимое разрешение по скорости (для порогового черенковского счетчика):

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{1}{\beta^2 n \sin \theta}$$

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} \approx \frac{\Delta\theta_{disp}}{\beta d\theta/d\beta} \approx \frac{\Delta n}{n}.$$

В таблицах оптических свойств материалов дисперсию характеризуют величиной $\frac{n_d-1}{n_F-n_C}$, где индексы относятся к линиям излучения водорода F

- 486.1, C - 656.3 нм и гелия d - 587.6 нм. Для полистирола ее значение около 30, для кварца - 70.

Длительность вспышки черенковского света

$$\Delta t = \frac{l}{\beta c} \left(\frac{1}{\beta \cos^2 \theta} - 1 \right) .$$

При $\beta = 1$ и $l = 5$ см оргстекла (РММА) $\Delta t \sim 0.2$ нс.