

Государственный научный центр Российской Федерации
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Национальный исследовательский центр
«Курчатовский институт»

На правах рукописи

Садовский Сергей Анатольевич

**Исследование двух-, трех- и
четырёхмезонных систем, образующихся в
зарядовообменных π^-p -взаимодействиях**

Специальность 01.04.23 - физика высоких энергий

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Протвино 2015 г.

Оглавление

Введение	4
1 Постановка и обработка данных экспериментов на установках ГАМС-2000 и ГАМС-4000	7
1.1 Постановка экспериментов в ИФВЭ и ЦЕРН	8
1.1.1 Эксперимент SERP-E-140 в ИФВЭ	9
1.1.2 Эксперимент NA12 в ЦЕРН	11
1.2 Система обработки данных с годоскопических спектрометров ГАМС	13
1.2.1 Калибровка спектрометров ГАМС	13
1.2.2 Параметризация электромагнитных ливней	18
1.2.3 Реконструкция событий в спектрометрах ГАМС	24
1.2.4 Кинематический анализ событий	31
1.3 Моделирование событий в спектрометрах ГАМС	35
1.3.1 Принципы моделирования событий	35
1.3.2 Банк реальных фотонных ливней	36
1.3.3 Метод среднего ливня	40
1.4 Параметризация многомерной эффективности	41
1.4.1 Постановка задачи	42
1.4.2 Сходимость процедуры параметризации	43
1.4.3 Уменьшение числа членов разложения	47
1.5 Заключительные комментарии	49
2 Методика парциально-волнового анализа двухмезонных систем	50
2.1 Модель ПВА для реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$	50

2.2	Проблема неоднозначности решений ПВА	51
2.2.1	Решение проблемы неоднозначности	54
2.2.2	Сшивку решений ПВА	57
2.2.3	Моделирование неоднозначностей методом Монте-Карло	58
2.3	Исследование точности ПВА методом Монте-Карло	62
3	Парциально-волновой анализ реакции $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$	75
3.1	Изучение $\pi^0 \pi^0$ -системы при импульсе 38 ГэВ/с	76
3.1.1	Модель ПВА, фит угловых распределений	77
3.1.2	Результаты ПВА при импульсе 38 ГэВ/с, сеанс 1980 г.	79
3.1.3	Результаты ПВА при импульсе 38 ГэВ/с, сеанс 1984 г.	82
3.2	Изучение $\pi^0 \pi^0$ -системы при импульсе 100 ГэВ/с	86
3.2.1	Модель ПВА и проблема неоднозначности решений	87
3.2.2	Парциально-волновой анализ в области масс до 2.4 ГэВ	89
3.2.3	Парциально-волновой анализ в области масс до 3.0 ГэВ	92
3.2.4	Результаты ПВА, скалярные резонансы	94
3.2.5	Резонансы с высшими спинами	97
3.3	Краткие итоги	100
4	Парциально-волновой анализ реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$	101
4.1	Первые результаты ПВА при импульсе 100 ГэВ/с	101
4.2	Анализ D -волны в реакции $\pi^- p \rightarrow a_2^0(1320)n$ при 100 ГэВ/с	105
4.3	Изучение реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с	113
4.4	Изучение $\eta \pi^0$ -системы в области масс до 1200 МэВ	114
4.5	Наблюдение $a_4^0(2040)$ -мезона в канале $\eta \pi^0$	118
4.5.1	Спектр масс и угловые распределения в системе $\eta \pi^0$	119
4.5.2	Парциально-волновой анализ в терминах моментов	120
4.5.3	Парциально-волновой анализ в терминах амплитуд	125
4.5.4	Параметры $a_4^0(2040)$ -резонанса, сечение образования	129
4.6	Анализ $\eta \pi^0$ -системы в области масс до 1800 МэВ	130
4.6.1	Процедура ПВА, сшивка нетривиальных решений	131

4.6.2	Выбор физического решения	132
4.6.3	Интерпретация физического решения	135
5	Анализ $\eta\pi^0\pi^0$-систем, образующихся в зарядовообменной π^-p-реакции при импульсе 100 ГэВ/с	138
5.1	Отбор $\eta\pi^0\pi^0$ -событий, спектр масс	139
5.2	Парциально-волновой анализ $\eta\pi^0\pi^0$ -системы	140
5.3	Представление Земаха для амплитуд трехмезонных распадов	141
5.4	Модель ПВА для системы $\eta\pi^0\pi^0$	143
5.5	Процедура фитирования распределений Далитца	145
5.6	Результаты парциально-волнового анализа	147
5.7	Сечения образования резонансов	151
5.8	Краткие итоги	151
6	Изучение $4\pi^0$-системы	153
6.1	Отбор $4\pi^0$ -событий	154
6.2	Феноменологические амплитуды распада $4\pi^0$ -системы	158
6.3	Анализ угловых распределений в $4\pi^0$ -системе	160
6.4	Анализ реакции $\pi^-p \rightarrow 4\pi^0n$ при импульсе 100 ГэВ/с	161
6.5	Анализа реакции $\pi^-p \rightarrow 4\pi^0n$ при импульсе 38 ГэВ/с	165
7	Результаты проведенных исследований, их место в мезонной спектроскопии	168
7.1	Решение проблемы неоднозначностей ПВА	168
7.2	Скалярные резонансы	169
7.3	Резонансы с высшими спинами	175
7.4	Система $\eta\pi$ в области масс до 1800 МэВ	177
7.5	Резонансы в системе $\eta\pi^0\pi^0$	178
	Заключение	183
	Литература	186

Введение

В основу настоящей диссертации положены результаты экспериментальных исследований [1-29], выполненных в рамках программы ГАМС на 70-ГэВ ускорителе ИФВЭ [30, 31], а также на 450-ГэВ протонном синхротроне ЦЕРН (эксперимент NA12) [32] с использованием многофотонных спектрометров ГАМС-2000 и ГАМС-4000, соответственно.

Диссертация состоит из Введения семи глав и Заключения, содержит 66 рисунков, 5 таблиц и 190 библиографических ссылок.

В первой главе описана постановка экспериментов для изучения зарядовообменных π^-p -взаимодействий на установках ГАМС-2000 и ГАМС-4000, соответственно, в ИФВЭ и ЦЕРН. Изложена методика обработки данных экспериментов с годоскопических многофотонных спектрометров типа ГАМС, включая реконструкцию, кинематический анализ, отбор и моделирование событий методом Монте-Карло. Большое внимание здесь уделено процедуре параметризации многомерной эффективности регистрации событий в эксперименте. Рассмотрено приложение развитых методов для параметризации многомерных Монте-Карло распределений рядами Фурье на основе принципа максимума энтропии.

Во второй главе на примере реакции $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$ рассмотрена методика проведения масс-независимого парциально-волнового анализа систем из двух псевдоскалярных мезонов. Подробно рассмотрена проблема неоднозначности парциально-волнового анализа в терминах амплитуд реакций, а также проблема сшивки нетривиальных решений в соседних массовых интервалах. Проведено детальное изучение точности парциально-волнового анализа методом Монте-Карло, рассмотрена проблема выбора функционала минимизации при проведении анализа угловых распределений продуктов реакции.

В третьей главе представлены результаты парциально-волнового анализа реакции $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ при импульсах 38 и 100 ГэВ/с. Подробно рассмотрена проблема неоднозначностей ПВА применительно к этой реакции, сшивка нетривиальных решений в соседних массовых интервалах, критерии идентификации физического решения. Приводятся сечения и обсуждаются механизмы образования $f_0(990)$ -, $f_2(1270)$ -, $f_0(1370)$ -, $f_0(2010)$ -, $f_4(2050)$ - и $f_6(2560)$ - мезонов в указанной выше реакции.

В четвертой главе представлены результаты парциально-волнового анализа реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$ при импульсах 100 и 38 ГэВ/с. Здесь подробно рассмотрена проблема неоднозначности ПВА для данной реакции, сшивка глобальных решений, критерии выбора физического решения, процедуры выделения и измерения параметров резонансов $a_0(980)$, $a_2(1320)$ и $a_4(2040)$, обсуждаются механизмы образования этих резонансов. Наконец, рассматриваются и обсуждаются данные проведенных экспериментов по экзотическому состоянию $\pi_1^0(1400)$ с квантовыми числами $I^G J^{PC} = 1^- 1^{-+}$.

Пятая глава посвящена спин-волновому анализу трехмезонных систем методом Земаха. Кратко рассмотрены формализм амплитуд Земаха, формат представления данных, методика учета аппаратурной функции и фитирования распределений Далица, критерии сходимости фита. Представлены результаты анализа системы $\eta \pi^0 \pi^0$ в реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 \pi^0 n$ при импульсе 100 ГэВ/с, в том числе парциальные вероятности распадов наблюдающихся мезонных состояний $\eta(1295)$, $i/\eta(1440)$, $f_1(1285)$, $f_1(1420)$, а также сечения их образования в указанной реакции.

В шестой главе представлены результаты анализа системы $4\pi^0$, образующейся в реакции $\pi^- p$ -перезарядки при импульсах 100 и 38 ГэВ/с. Проведен феноменологический анализ спин-волновой структуры $4\pi^0$ -состояний на основе угловых распределений продуктов реакции в системе центра масс $4\pi^0$ -системы. Определена вероятность $4\pi^0$ -канала распада $f_2(1270)$ -мезона, обнаружено резонансное состояние $f_2(1810)$, измерены парциальные сечения рождения $f_2(1270)$ -, $G(1590)/f_0(1500)$ - и $f_2(1810)$ -мезонов в канале распада

на $4\pi^0$ -мезона при импульсах 100 и 38 ГэВ/с.

В седьмой главе проведено обсуждение полученных в диссертации результатов, сравнение их с данными других экспериментов и современными теоретическими моделями. Указано их место в мезонной спектроскопии.

В Заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Работы, положенные в основу настоящей диссертации [1-29], опубликованы в виде препринтов ИФВЭ, статей в журналах "Ядерная Физика", "Доклады Академии Наук", "Приборы и Техника Эксперимента", "Nuclear Instruments and Methods", "The European Physical Journal", "Nuclear Physics A", "Nuclear Physics B", "Physics Letters B", доложены на научных семинарах ИФВЭ, сессиях Отделения ядерной физики АН СССР, международных конференциях по физике высоких энергий, адронной спектроскопии, искусственному интеллекту и методике обработки данных, а также конференциях HADRON'95, HADRON'97 и LEAP'98.

Глава 1. Постановка и обработка данных экспериментов на установках ГАМС-2000 и ГАМС-4000

Целью экспериментов, выполненных в 1979 - 1998 гг. на спектрометре ГАМС-2000 в ИФВЭ (VI совместный эксперимент ИФВЭ-ЦЕРН) и, одновременно, на спектрометре ГАМС-4000 в рамках эксперимента NA12 в ЦЕРН, было исследование нейтральных мезонных состояний, образующихся в зарядовообменной реакции π^- -мезонов на протонах

$$\pi^- p \rightarrow M_{\rightarrow k\gamma}^0 n \quad (1.1)$$

и распадающихся в конечном счете на γ -кванты. Использование зарядовообменных процессов в качестве источника нейтральных состояний оказалось весьма эффективным инструментом в мезонной спектроскопии. В рамках этого направления была проведена серия экспериментов по поиску редких распадов нейтральных мезонов, резонансов с высшими спинами и экзотических мезонных состояний, включая $4q$ -состояния, гибриды и глоболы, см. подробные обзоры [33, 34].

Проведение экспериментов такого уровня стало возможным благодаря созданию в 70-х годах в ИФВЭ новой методики регистрации многофотонных событий, основу которой составляли Годоскопические Автоматизированные Многофотонные Спектрометры (ГАМС). Последние представляют собой электромагнитные калориметры полного поглощения с радиаторами из свинцового стекла [35, 36, 37]. Как правило, они содержат тысячи детектирующих элементов, собранных в виде прямоугольных матриц, что позволяет детектировать одновременно до 10 и более фотонов, измерять их энергии и координаты с высокой точностью. Такие годоскопические калориметры впоследствии стали неотъемлемой частью большинства универсальных установок как в ИФВЭ, так и за рубежом, см. например [38, 39, 40, 41, 42].

Указанное развитие экспериментальной методики с неизбежностью повлекло за собой адекватное развитие методов приема (сбора) и обработки данных экспериментов. В результате успешное проведение экспериментов в значительной мере стало определяться также и системами сбора, обработки и моделирования данных экспериментов. Дальнейшее развитие получила методика Парциально-Волнового Анализа (ПВА) двух-, трех- и многомезонных систем, без применения которой получить многие важные результаты в адронной спектроскопии было бы практически невозможно.

Наконец, возвращаясь к экспериментам на установках ГАМС-2000 и ГАМС-4000, существенное значение имела и параллельность проведения указанных экспериментов при двух разных энергиях пионного пучка (38 ГэВ в ИФВЭ и 100 ГэВ в ЦЕРН), что позволяло отслеживать энергетическую зависимость того или иного эффекта и тем самым упрощало интерпретацию результатов. Совокупность всех этих факторов обусловила, в конечном счете, успешное проведение указанных экспериментов в целом.

1.1. Постановка экспериментов в ИФВЭ и ЦЕРН

Как уже отмечалось выше, исследования систем псевдоскалярных мезонов в зарядовобменной реакции (1.1) проводились одновременно на установках ГАМС-2000 в ИФВЭ (эксперимент SERP-E-140) и ГАМС-4000 в ЦЕРН (эксперимент NA12). При этом постановки обоих экспериментов были во многом схожи. Эксперименты в ИФВЭ были выполнены на канале отрицательных частиц 4В ускорителя У-70, при этом номинальный импульс частиц пучка в канале был равен 30-40 ГэВ/с. Эксперименты в ЦЕРН также проводились на канале отрицательных частиц (в основном пионов) Н8 ускорителя SPS в Северном экспериментальном зале ЦЕРН при импульсе 100 ГэВ/с.

1.1.1. Эксперимент SERP-E-140 в ИФВЭ

Общая схема установки ГАМС-2000 на канале 4В приведена на Рис.1.1. Вторичный пучок отрицательных частиц при помощи магнитов M_7 , M_{21} , M_{23} и квадрупольных линз L_{25} , L_{26} , L_{27} , L_{28} конечной части магнитооптического канала фокусировался на жидководородную мишень LH_2 длиной 40 см.

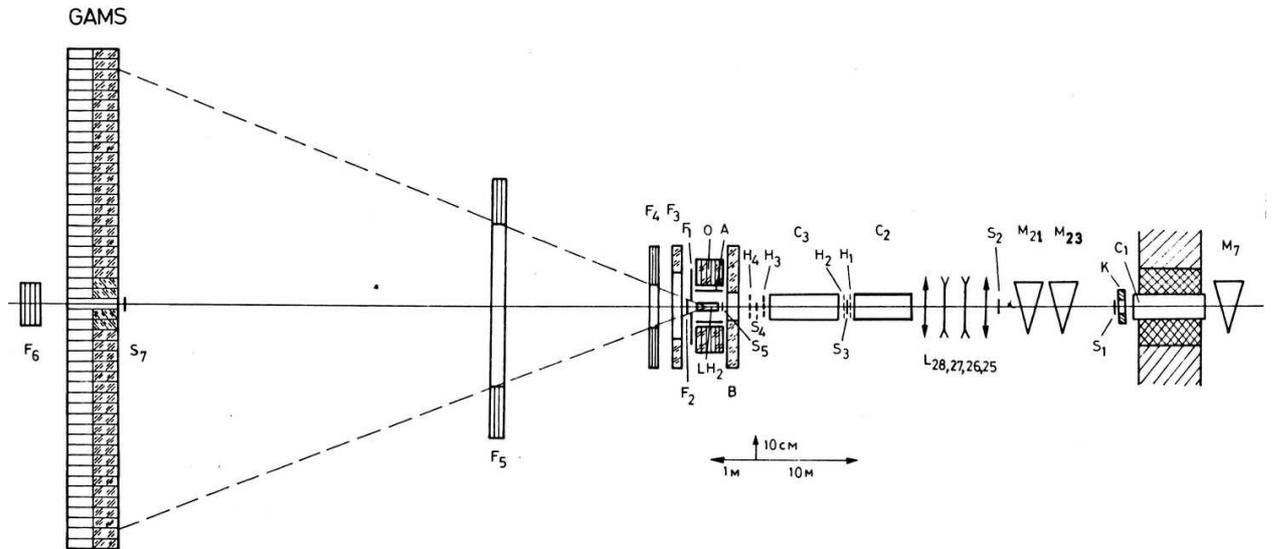


Рис. 1.1: Схема экспериментальной установки ГАМС-2000 на канале 4В ускорителя У-70 в ИФВЭ, пояснения к рисунку см. в основном тексте.

Регистрация пучковых частиц осуществлялась телескопом сцинтилляционных счетчиков $S_1 - S_5$. Для идентификации типа частиц использовались пороговые черенковские счетчики C_1 , C_2 , C_3 . Поперечные координаты частиц пучка измерялись при помощи системы двухкоординатных сцинтилляционных годоскопов $H_1 - H_4$. Точка взаимодействия частиц пучка в мишени LH_2 определялась по черенковскому излучению частиц в жидком водороде с точностью ± 3 см, подробнее см. в [43].

Мишень была окружена охранной системой из сцинтилляционных счетчиков F_1 , F_2 , A (12 счетчиков), счетчиков O (72 счетчика), B и F_3 (по 12 счетчиков каждый) из свинцового стекла и апертурных счетчиков-сандвичей (свинец-сцинтиллятор) F_4 и F_5 . Триггер, который вырабатывался по схеме

$$Tr = S_1 * S_2 * S_3 * S_4 * S_5 * \bar{B} * \bar{F}_1 * \bar{F}_2 * \bar{A} * \bar{O} * \bar{F}_3 * \bar{F}_4 * \bar{F}_5 \quad (1.2)$$

с учетом сигналов от черенковских счетчиков C_1 , C_2 и C_3 , использовался для выделения событий с нейтральными частицами в конечном состоянии, образующимися при взаимодействии π^- -мезонов пучка с протонами жидководородной мишени в реакции (1.1),

Для регистрации высокоэнергичных фотонов, вылетающих в направлении телесного угла, определяемого апертурными счетчиками F_4 и F_5 , использовался спектрометр ГАМС-2000, который является основным детектором установки. Спектрометр ГАМС-2000, схематически показанный на Рис. 1.2,

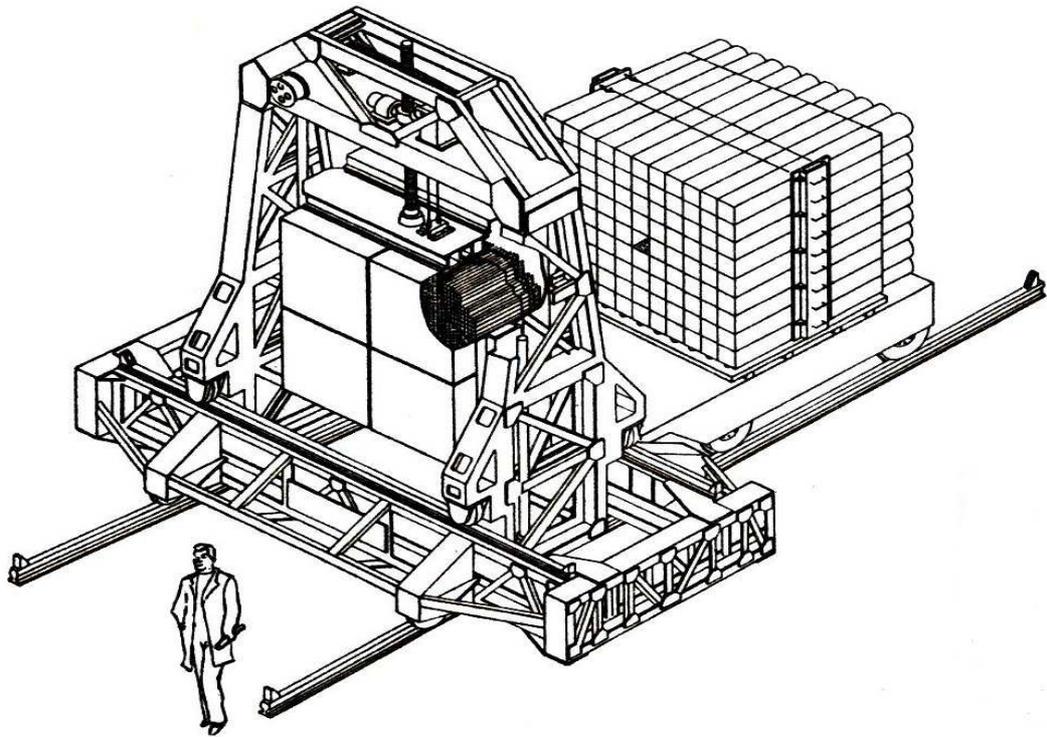


Рис. 1.2: Общий вид комбинированного детектора, расположенного на канале 4В ускорителя У-70 в ИФВЭ: на переднем плане показан спектрометр ГАМС-2000; на втором плане — модульный адронный калориметр, который в описываемых ниже экспериментах не использовался. Рисунок взят из работы [44].

представлял собой матрицу из 48×32 черенковских счетчиков полного поглощения с радиаторами из свинцового стекла с одним отсутствующим счетчиком в центре для пропускания не провзаимодействовавших с мишенью частиц пучка. Регистрация черенковского света, вызванного частицами электромагнитных ливней, возникающих в спектрометре при попадании в него

высокоэнергичных γ -квантов (фотонов), осуществлялась фотоэлектронными умножителями ФЭУ-84-3. Сигналы с фотоумножителей в каждом событии поступали на аналого-цифровые преобразователи, считывались в ЭВМ приема данных эксперимента, записывались на внешние магнитные носители в виде набора амплитуд A_i и соответствующих им адресов. Индекс i используется здесь и далее для последовательной нумерации счетчиков спектрометра ГАМС-2000.

Поперечные размеры радиаторов счетчиков (38×38 мм²) сравнимы с шириной электромагнитных ливней в спектрометре. Продольный размер (длина радиаторов) равен 41 см, что составляет ≈ 20 радиационных длин. Такой выбор размеров счетчиков позволяет измерять поперечные координаты γ -квантов в плоскости спектрометра ГАМС-2000 с точностью ≈ 1.4 мм. Точность измерения энергии фотонов ($5.5\% / \sqrt{E_\gamma / 1 \text{ GeV}} + 1.3\%$) остается при этом на уровне лучших результатов, полученных для спектрометров с крупной ячейкой из свинцового стекла. Характерной особенностью годоскопических спектрометров типа ГАМС является высокая эффективность регистрации событий с большой множественностью γ -квантов, до 10 и более, в конечном состоянии реакции (1.1). Подробнее спектрометр ГАМС-2000 описан в работе [36], см. также [35].

1.1.2. Эксперимент NA12 в ЦЕРН

Схема эксперимента NA12 приведена на Рис.1.3. Она имеет структуру, подобную эксперименту SERP-E-140 в ИФВЭ. Установка состоит из спектрометра ГАМС-4000, жидководородной мишени диаметром 6 см и длиной 60 см, окруженной охранной системой счетчиков, и апертурных счетчиков-сэндвичей [45]. Спектрометр ГАМС-4000 представлял собой матрицу из 64×64 черенковских счетчиков из свинцового стекла размером $38 \times 38 \times 450$ мм³. Он позволял эффективно измерять координаты и энергии до 20 γ -квантов в реакции (1.1). Расстояние между мишенью и спектрометром в описываемых ниже экспериментах было выбрано равным 15 м. Активная мишень, схематически

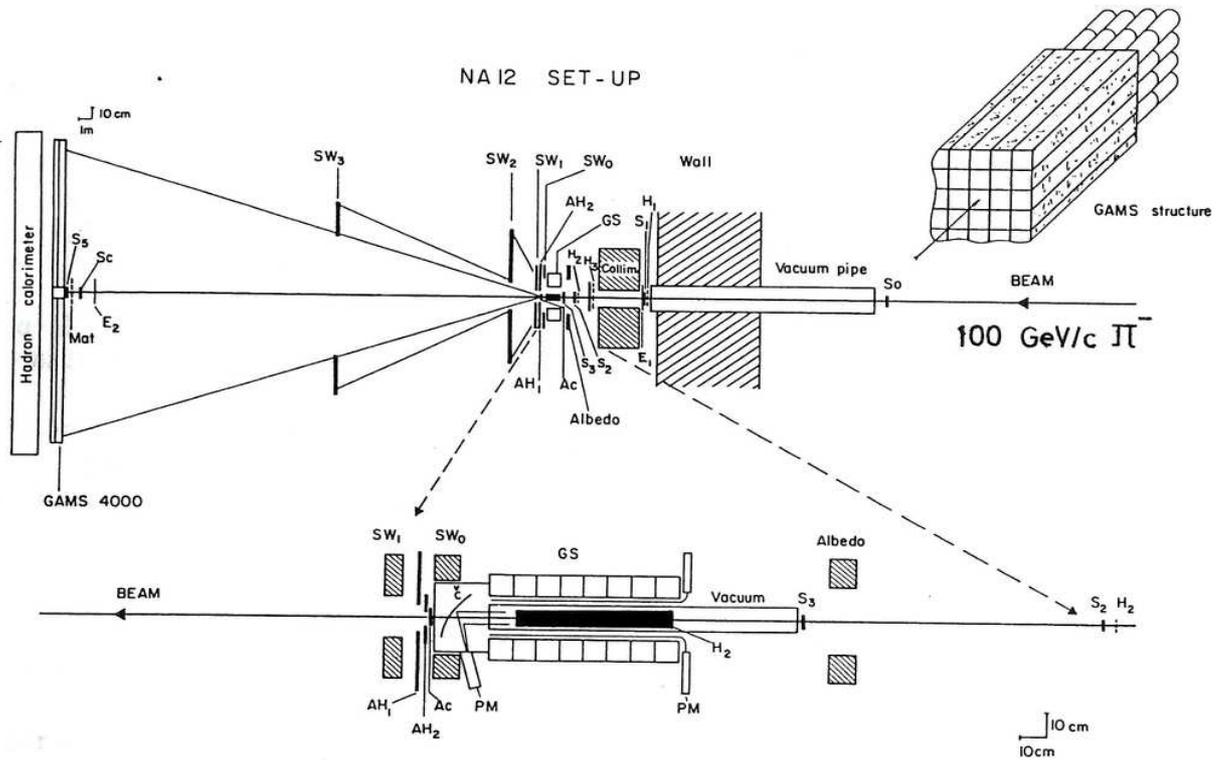


Рис. 1.3: Схема экспериментальной установки эксперимента NA12 [46]: GAMS-4000 - годоскопический многофотонный черенковский спектрометр полного поглощения, S_i - сцинтилляционные счетчики частиц пучка, H_i - пучковые годоскопы, GS - охранная система счетчиков, H_2 - жидководородная мишень, AH - сцинтилляционные счетчики, SW_i - апертурные счетчики-сандвичи.

показанная на Рис.1.3 внизу, позволяла измерять продольную координату точки π^-p -взаимодействий с нейтральными частицами в конечном состоянии по интенсивности черенковского света в мишени от ультрарелятивистских π^- -мезонов пучка до точки их взаимодействия с протонами мишени.

Условием триггера нулевого уровня установки было требование, чтобы из мишени не вылетали заряженные частицы. С помощью быстрого триггерного процессора высокого уровня определялась суммарная энергия, выделенная в спектрометре ГАМС-4000 в результате данного π^-p -взаимодействия. События, в которых она была меньше 50 ГэВ, отбрасывались. За время измерений в типичном сеансе через мишень установки пропускалось $\sim 2 \cdot 10^{12}$ отрицательных пионов.

1.2. Система обработки данных с годоскопических спектрометров ГАМС

Системы обработки данных экспериментов SERP-E-140 в ИФВЭ и NA12 в ЦЕРН во многом схожи. Каждая включает в себя калибровку спектрометра ГАМС в широком пучке электронов, процедуру параметризации электромагнитных ливней в спектрометре, программу реконструкции координат и энергий фотонов по детектируемому распределению энерговыведения в ячейках спектрометра, кинематический анализ событий. Хотя физически программы обработки данных экспериментов SERP-E-140 и NA12 — это, несомненно, разные программы, в них были использованы одни и те же принципы, алгоритмы, а часто — и одни и те же процедуры. Вместе с тем, настройка программ обработки данных экспериментов проводилась эксклюзивно и учитывала особенности аппаратуры и постановки каждого эксперимента.

Ниже мы рассмотрим систему обработки данных на примере эксперимента SERP-E-140 в ИФВЭ. Однако в дальнейшем, по ходу изложения результатов исследований, мы будем отмечать некоторые особенности обработки данных эксперимента NA12, если нам это будет представляться существенным.

1.2.1. Калибровка спектрометров ГАМС

Калибровка спектрометра ГАМС-2000 проводилась в широком электронном пучке, как правило, в начале и в конце каждого сеанса. При этом пучок был расфокусирован так, чтобы его рабочая зона охватывала одновременно примерно 4x4 счетчика спектрометра. Для калибровки использовался отрицательный пучок с импульсом 10 ГэВ/с или, чаще, 25 ГэВ/с. Электроны (их примесь в пучке составляла 0.5%) выделялись при помощи пороговых черенковских счетчиков C_1 , C_2 и C_3 , см. Рис.1.1. В процессе калибровки касета спектрометра непрерывно перемещалась по вертикали и горизонтали под управлением ЭВМ, обеспечивая приблизительно равномерное облучение всех

счетчиков спектрометра ГАМС электронами.

Перед калибровкой в начале каждого сеанса проводилась процедура выравнивания сигналов со всех счетчиков спектрометра. По существу, это предварительная калибровка каналов спектрометра, в результате которой значения полученных коэффициентов использовались, чтобы подкрутить потенциометры в делителях ФЭУ 84-3 с целью выравнивать сигналы со счетчиков. Подстройка потенциометров по коэффициентам калибровки осуществлялась автоматически под управлением ЭВМ. Выравнивание является, в принципе, итерационной процедурой: после открутки потенциометров проводилась следующая калибровка, и, если разброс вновь полученных калибровочных коэффициентов превышал 20%, подкрутка потенциометров проводилась еще раз. По завершению указанной процедуры достигались две цели: во-первых, разброс большинства калибровочных коэффициентов действительно не превышал 20-25%, а во-вторых, одновременно выравнивались и сигналы с последних динодов ФЭУ, которые использовались для выработки триггера, подробнее см. в [36].

Собственно калибровка спектрометра ГАМС-2000 занимала около 8 часов ускорительного времени. В каждый счетчик попадало при этом от 200 до 300 электронов, что достаточно для определения калибровочных коэффициентов с процентной точностью. Более детально процедура калибровки описана в работе [47].

В случае спектрометра ГАМС-4000 для калибровки использовался практически чистый электронный пучок с импульсом 100 ГэВ/с. При этом процедура калибровки занимала 12-15 часов ускорительного времени.

В основе калибровки широким пучком лежит процедура минимизации разрешения спектрометра по энергии на множестве калибровочных событий. Соответствующий функционал минимизации имеет вид:

$$F = \sum_j \left(\sum_i \alpha_i A_i^j - E_b \right)^2, \quad (1.3)$$

где α_i - калибровочный коэффициент для счетчика i , A_i^j - амплитуда с этого

счетчика в j -том калибровочном событии, E_b - энергия электронного пучка. Суммирование в (1.3) проводится по всем калибровочным событиям j , а в каждом событии - по всем счетчикам i , где амплитуда A_i^j была выше некоторого порога A_{th} , равного нескольким отсчетам ADC. При этом для вычисления калибровочных коэффициентов α_i достаточно решить систему линейных уравнений:

$$\sum_i \alpha_i a_{ik} = E_b \sum_j A_k^j \quad (1.4)$$

с матрицей

$$a_{ik} = \sum_j A_i^j A_k^j, \quad (1.5)$$

пропорциональной корреляционной матрице амплитуд в калибровочных событиях. Поскольку электронный ливень в спектрометре ГАМС занимает небольшое число близкорасположенных счетчиков (обычно 5x5), корреляции между амплитудами пространственно удаленных счетчиков отсутствуют, корреляционная матрица сводится к ленточному типу и поэтому легко допускает упаковку. В результате объем необходимой памяти для хранения матрицы сокращается более, чем в 15 раз, что было существенно в 80 годах из-за ограниченных вычислительных ресурсов в то время.

Система линейных уравнений (1.4) решалась итерационным методом Зайделя, см. например [48]. Если все счетчики спектрометра исправны, а разброс калибровочных коэффициентов в результате предварительно проведенной процедуры выравнивания сигналов со счетчиков спектрометра не превышает $\pm 25\%$, то, как правило, 20 итераций было достаточно для вычисления калибровочных коэффициентов спектрометра ГАМС-2000 с относительной точностью лучшей чем 0.1%. Сходимость метода ухудшается при существенной неоднородности облучения спектрометра электронами, но особенно - с ростом числа дефектных или неисправных счетчиков. В последнем случае, если число таких счетчиков было достаточно большим (большим 8-10), этим методом иногда вообще не удавалось получить калибровочные коэффициенты с приемлемой точностью.

От указанных недостатков метода минимизации энергетического разрешения спектрометра на ансамбле калибровочных событий в значительной мере свободен метод среднего ливня, см. [47]. Этот метод состоит в минимизации энергетического разрешения спектрометра на множестве усредненных ливней B_i^k калибровочных событий в спектрометре:

$$B_i^k = \frac{1}{N_k} \sum_j^{N_k} A_i^{kj}, \quad (1.6)$$

где A_i^{kj} - амплитуда в счетчике i в j -том калибровочном событии, когда максимальная амплитуда в электронном ливне находится в счетчике k , а N_k - число калибровочных событий, когда максимальная амплитуда находится в этом счетчике. Метод среднего ливня основан на том, что энергия ливня с максимальной амплитудой в счетчике k не зависит от точки попадания электрона в этот счетчик, и, следовательно, величина

$$E_k = \sum_i \alpha_i B_i^k \quad (1.7)$$

с высокой точностью ($\sim 1.1\%/\sqrt{N_k}$ в случае калибровки пучком электронов с энергией 25 ГэВ) равна энергии пучка. Поэтому функционал минимизации имеет вид:

$$F = \sum_k \left(\sum_i \alpha_i B_i^k - E_b \right)^2, \quad (1.8)$$

где оба суммирования проводятся по всем счетчикам спектрометра. Поиск минимума функционала (1.8) проводился подобно тому, как это уже было изложено выше для функционала (1.3).

Наконец, следует упомянуть и приближенные методы калибровки. Практически все они основаны на функционале (1.3). Суть различных приближенных методов состоит в постепенном огрублении информации о ливнях калибровочных событий. Например, за счет некоторой потери точности можно пренебречь энергосделением в периферийном слое области 5x5, занимаемой типичным электронным ливнем. В результате заметно уменьшается

размер (упакованной) корреляционной матрицы, равно как и корреляции калибровочных коэффициентов различных счетчиков, возрастает устойчивость процедуры минимизации.

Следующий шаг в этом направлении состоит в полном отказе от периферии ливня. При этом ливень характеризуется лишь энергосделением A_k^j в центральном счетчике, т.е. счетчике с максимальной амплитудой. Получающийся при этом метод, основанный на функционале (1.3), по сути близок к процедуре калибровки спектрометра по энергосделению в центральном счетчике при последовательном облучении центральных областей всех счетчиков спектрометра узким пучком. Недостатки метода обусловлены прежде всего некорректностью использования максимальной амплитуды ливня в качестве оценки его энергии. Их можно в значительной мере нивелировать, если вместо амплитуды A_k^j использовать сумму амплитуд $S^j = \sum_i A_i^j$ в калибровочном событии. Дальнейшее совершенствование метода связано с использованием периферии ливня не только для вычисления суммарного энергосделения, но и для коррекции калибровочных коэффициентов периферических счетчиков, посредством введения весовой функции W_i^j/S^j . В результате получаем функционал:

$$F = \sum_j \left(\sum_i \alpha_i S^j - E_b \right)^2 \cdot W_i^j / S^j. \quad (1.9)$$

Решение соответствующей системы линейных уравнений тривиально:

$$\alpha_i = E_b \left(\sum_j W_i^j / \sum_j S^j W_i^j \right) \quad (1.10)$$

и легко допускает запись в рекуррентном виде по числу калибровочных событий, использованных для вычисления калибровочных коэффициентов. В реальном эксперименте в качестве веса использовалась функция $W_i^j = Const \cdot (A_i^j)^2$. Более детально эта и другие процедуры, включая самокалибровку спектрометров ГАМС, изложены в работе [47].

1.2.2. Параметризация электромагнитных ливней

Богатый статистический материал по электронным ливням в спектрометрах ГАМС, получаемый в результате калибровки спектрометра широким пучком (до полумиллиона ливней в результате каждой калибровки спектрометра ГАМС-2000) позволяет провести детальное описание поперечного профиля электромагнитных ливней в ГАМС, а также получить ряд других функциональных зависимостей, которые в дальнейшем использовались для реконструкции физических событий в спектрометрах. Описание соответствующих процедур можно найти в работах [1, 47]. Отметим лишь в этой связи, что поскольку в спектрометрах ГАМС-2000 и ГАМС-4000 для черенковских радиаторов счетчиков использовались разные марки свинцового стекла, параметризация электромагнитных ливней в этих спектрометрах была проведена независимо.

Восстановление координат ливней

Существуют различные способы восстановления координат ливней по энерговыделению в ячейках спектрометра. Традиционные методы, см. например [49, 50], используют те или иные оценки координат $\xi_{x,y}(A)$, основанные на приближенном описании профиля (амплитуд) ливня экспонентой (или суммой экспонент) в зависимости от координаты ливня, с последующей коррекцией для получения несмещенной оценки координат линия X_0, Y_0 :

$$X_0 = f(\xi_x(A)), \quad Y_0 = f(\xi_y(A)). \quad (1.11)$$

При этом точность восстановления координат составляет величину типа 1.5 мм, что вполне приемлемо для большинства экспериментов, выполненных на спектрометрах ГАМС.

Вместе с тем описанный подход не лишен недостатков. В частности, вариация точности восстановления координат ливня в зависимости от точки его попадания относительно ячеек спектрометра (неотъемлемое свойство

спектрометров типа ГАМС) приводит к появлению периодической структуры в распределении по координатам ливней при равномерном облучении спектрометра электронным пучком, см. Рис. 1.4, что в свою очередь не может не привести к соответствующему искажению различных кинематических распределений в реальном эксперименте. Преимущество несмещенных оценок координат становится в результате не очевидным.

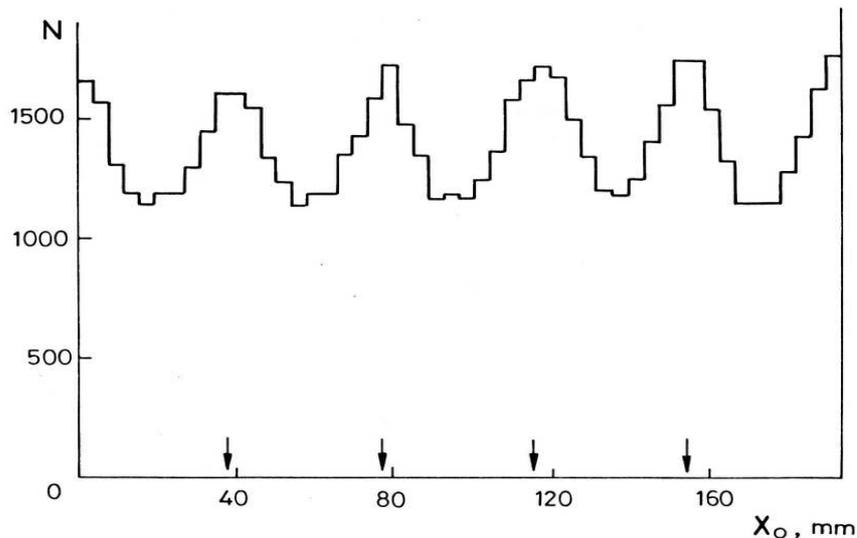


Рис. 1.4: Распределение электронов по несмещенной координате X_0 при равномерном облучении спектрометра ГАМС-2000 во время калибровки в широком пучке. Стрелками указаны границы ячеек спектрометра. Рисунок взят из работы [47].

В силу вышеизложенного при обработке данных со спектрометров ГАМС был использован иной подход, см. [1], для получения функциональной зависимости координат ливней от энергосодержания в ячейках спектрометра. К изложению этого подхода мы переходим ниже ¹. Суть его состоит в следующем:

- вначале строится некая оценка координаты ливня, например, центр тяжести ξ_x ливня по 3×3 ячейкам вокруг ячейки с максимальной амплитудой;
- при равномерном облучении спектрометра ($dN/dX = C_1 = Const$) рас-

¹Учитывая полную XY-симметрию спектрометра ГАМС, мы приводим здесь и далее лишь соответствующие соотношения для X-координаты ливня.

пределение ливней по величине ξ_x тесно связано с функциональной зависимостью истинной координаты ливня X от ее оценки ξ_x :

$$dN/d\xi_x = dN/dX \cdot dX/d\xi_x = C_1 \cdot dX/d\xi_x; \quad (1.12)$$

- далее, распределение $dN/d\xi_x$, построенное на множестве калибровочных событий спектрометра ГАМС в широком электронном пучке, фитируется полиномом четной степени $P_{2n}(\xi_x)$; в результате находится как параметризация $dX/d\xi = C_1 \cdot P_{2n}(\xi_x)$, так и искомая функциональная зависимость

$$X(\xi_x) = C_1 \int P_{2n}(\xi_x) d\xi_x + C_2 = P_{2n+1}(\xi_x); \quad (1.13)$$

- неизвестные константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий, в качестве которых используются известные априори значения функции (1.13) в центре и на границе ячеек, где центр тяжести 3x3 является несмещенной оценкой координаты ливня.

Поскольку функция $X(\xi_x)$ является периодической на коэффициенты полинома $P_{2n}(\xi_x)$ накладываются дополнительные условия гладкости в центре и на границах центральной ячейки ливня: это равенство нулю производной $P'_{2n}(0) = 0$ в центре ячейки (точка перегиба функции $X(\xi_x)$) и равенство первых производных функции $X(\xi_x)$ на противоположных границах ячейки. Отметим, что параметризация функции $dX/d\xi_x$ в виде полинома не является оптимальной. Можно сразу распределение $dN/d\xi_x$ фитировать четной периодической функцией, например, в виде ряда по $\cos(2\pi n \xi_x/d)$, где d - размер ячейки спектрометра, n - номер гармоники. При этом дополнительные условия на периодичность функции становятся излишними.

Описанный метод является достаточно мощным. Он может быть использован для определения координат на основе широкого класса начальных оценок ξ . Например, при реконструкции координат близкорасположенных ливней полезно использовать в качестве величин ξ центры тяжести ливня

$$\xi_x = (A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22})/E_4, \quad \xi_y = (A_{11} - A_{12} + A_{21} - A_{22})/E_4, \quad (1.14)$$

по четырем ячейкам с максимальным суммарным энерговыделением $E_4 = A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}$, что позволяет достаточно точно определять координаты частично перекрывающихся ливней. Хотя такая процедура и приводит к смещенной оценке координат ливней, достигаемая при этом точность восстановления координат (≈ 1.4 мм) оказывается не хуже, полученной в традиционном подходе.

Параметризация ливней

Имея теперь в своем распоряжении оценки координат ливней по их энерговыделению в спектрометре и достаточно большой ансамбль ливней, полученный в результате калибровки спектрометра ГАМС широким электронным пучком, легко получить двумерную параметризацию амплитуд ливня в зависимости от координат ливня $\{X, Y\}$ относительно центров $\{X_i, Y_j\}$ ячеек ливня

$$A_{ij}(X, Y) = G(X_i - X, Y_j - Y), \quad (1.15)$$

например, при помощи кусочно-непрерывной функции с использованием экспоненты, рациональной и полиномиальной функций. Естественно, амплитуды (1.15) следует нормировать на полную энергию ливня. В результате мы приходим к *среднему ливню* a_{ij}

$$a_{ij}(X, Y) = G(X_i - X, Y_j - Y) / \sum_{ij} A_{ij}, \quad (1.16)$$

подробнее см. [1].

Заметно позже многолетний опыт работы с электромагнитными ливнями в спектрометрах ГАМС был обобщен в оригинальной статье А.А.Леднева [51]. И хотя многие важные результаты со спектрометров ГАМС, в том числе и вошедшие в настоящую диссертацию, были получены при помощи методики [1, 47], для полноты изложения представляется здесь целесообразным кратко обсудить основные моменты этой работы.

Идея работы [51] состоит в том, что следует параметризовать не энерговыделение ливня в отдельных ячейках спектрометра (1.15), а функцию плот-

ности поперечного энерговыведения ливня в практически однородной среде черенковских радиаторов спектрометра $\Phi(x, y)$, как обладающую более высокой степенью симметрии: $\Phi(x, y) = \Phi(\sqrt{x^2 + y^2})$. Последняя функция тесно связана с двумерной кумулятивной функцией полного энерговыведения ливня в спектрометре:

$$F_2(X, Y) = \int_{-\infty}^X \int_{-\infty}^Y \Phi(x, y) dx dy, \quad (1.17)$$

равно как и соответствующей одномерной кумулятивной функцией:

$$F_1(X) = \int_{-\infty}^X \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y) dx dy, \quad (1.18)$$

которая напрямую измеряется во время калибровки спектрометра широким пучком электронов:

$$F_1(X_{i_c} - \frac{d}{2} - X) = \sum_{i < i_c} \sum_j A_{ij}, \quad (1.19)$$

где X_{i_c} - x координата центра ячейки внутри кластера ($i_c > 1$), а d - поперечный размер ячейки спектрометра. Функция (1.17) предполагается нормированной на 1, т.е. $F_2(\infty, \infty) = 1$. При этом интересующее нас энерговыведение в ячейках спектрометра для ливня с единичной энергией выражается через двумерную кумулятивную функцию следующим образом:

$$A_{ij} = F_2(X_i + \frac{d}{2}, Y_j + \frac{d}{2}) - F_2(X_i + \frac{d}{2}, Y_j - \frac{d}{2}) - F_2(X_i - \frac{d}{2}, Y_j + \frac{d}{2}) + F_2(X_i - \frac{d}{2}, Y_j - \frac{d}{2}), \quad (1.20)$$

здесь X_i, Y_j - это координаты центра соответствующей (ij) ячейки кластера в спектрометре относительно координат ливня. В силу азимутальной симметрии функции $\Phi(x, y)$ выражение (1.18) может быть частично проинтегрировано:

$$F_1(X) = 2 \int_{|X|}^{\infty} \frac{\Phi(r) r dr}{\sqrt{r^2 - X^2}}, \quad (1.21)$$

и, таким образом, мы приходим к уравнению Абеля для функции $\Phi(r)$, имея в виду, что функция $F_1(X)$, вообще говоря, известна из эксперимента, см. (1.19). Решение уравнения (1.21) легко получить в виде

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_i \frac{a_i b_i}{(r^2 + b_i^2)^{3/2}}, \quad (1.22)$$

если предварительно функцию (1.19) аппроксимировать рядом

$$F_1(X) = \frac{1}{\pi} \sum_i a_i \operatorname{arctg} \frac{X}{b_i} + \frac{1}{2}, \quad (1.23)$$

с условием нормировки $\sum_i a_i = 1$, обеспечивающим правильную асимптотику функции на бесконечности. Обычно трех членов ряда достаточно, чтобы получить достаточно хорошую параметризацию функции, детали см. в [51]. Для полноты изложения приведем здесь еще и явный вид двумерной кумулятивной функции:

$$F_2(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \sum_i a_i \left(\operatorname{arctg} \frac{X}{b_i} + \operatorname{arctg} \frac{Y}{b_i} + \operatorname{arctg} \frac{XY}{b_i \sqrt{X^2 + Y^2 + b_i^2}} \right) + \frac{1}{4}. \quad (1.24)$$

В результате задача параметризации двумерной быстро меняющейся функции (1.15) сводится к параметризации одномерной функции (1.19), что весьма существенно улучшает точность параметризации при всегда ограниченной статистике "эталонных" ливней в реальном эксперименте.

Следует также подчеркнуть исключительную мощь данного подхода. Практически без всяких изменений изложенная выше методика поперечной параметризации электромагнитных ливней в спектрометрах типа ГАМС может быть применена для параметризации функции отклика в газовых детекторах с падовым считыванием сигналов, т.е. для параметризации функции плотности заряда на падовой плоскости такого типа детекторов. Эта методика, в частности, была применена нами для параметризации плотности заряда на падовой плоскости детектора CPV в эксперименте ALICE на LHC, см. [2]. Найденная в результате плотность заряда на падовой плоскости детектора CPV может быть использована далее для реконструкции координат перекрывающихся треков в этом детекторе. Она оказалась очень полезной и для быстрого моделирования событий в указанном детекторе с целью изучения эффективности и координатной точности восстановления координат треков в многотрековых событиях при планировании эксперимента ALICE, см. [41].

1.2.3. Реконструкция событий в спектрометрах ГАМС

Программа реконструкции событий предназначена для поиска электромагнитных ливней в спектрометрах ГАМС, определения координат и энергий ливней в зарегистрированных событиях на основе анализа энерговыделения в ячейках спектрометра. Мы рассмотрим здесь ее на примере реконструкции событий в спектрометре ГАМС-2000. Вместе с тем следует сразу отметить, что даже программа реконструкции событий в спектрометре ГАМС-2000 непрерывно совершенствовалась от сеанса к сеансу. При этом видоизменялись, совершенствовались и отбрасывались различные процедуры и алгоритмы, вводились новые. Поэтому мы, скорее, обсудим здесь общие принципы и отдельные ключевые алгоритмы, использовавшиеся в программе реконструкции, нежели программу реконструкции событий для конкретного сеанса. В любом случае программа реконструкции со спектрометров ГАМС носит существенно более эвристический характер, чем это изложено ниже.

В основе программы реконструкции лежит принцип аддитивности энерговыделения в спектрометре ГАМС, согласно которому энерговыделение в счетчиках спектрометра от перекрывающихся ливней равно сумме энерговыделений в этих счетчиках от отдельных ливней. Этот принцип хорошо выполняется для черенковских спектрометров полного поглощения. В пользу этого свидетельствует, в частности, линейность спектрометра ГАМС-2000 в широком диапазоне энергий [36].

Функционально программа реконструкции подразделяется на несколько независимых процедур. Первой из них является процедура поиска кластеров в событии. Кластер - это одна или несколько ячеек (счетчиков) с ненулевыми (т.е. выше некоторого порогового значения) амплитудами², граничащих друг с другом по вертикали или горизонтали непосредственно или через другие счетчики этого же кластера. Любой элемент одного кластера отделен от

²Здесь и в дальнейшем предполагается, что все амплитуды счетчиков нормированы с учетом соответствующих калибровочных коэффициентов. И поэтому мы вправе говорить теперь уже об энерговыделении в счетчиках спектрометра.

элементов другого кластера по крайней мере одним счетчиком (ячейкой) с нулевой амплитудой как по вертикали, так и по горизонтали. Тем не менее ячейки различных кластеров могут соприкасаться углами.

Следующая процедура предназначена для поиска ливней, реконструкции энергии и координат фотонов в заданном кластере. Для этого сначала ищутся счетчики с максимальной локальной амплитудой в кластере. Это такие счетчики, энергосодержание в которых выше энергосодержания в соседних счетчиках кластера по вертикали и горизонтали. Затем выбираются три элемента кластера соседних с локальным максимумом так, чтобы с одной стороны четверка 2×2 счетчиков имела максимальное суммарное энергосодержание E_4 , а с другой стороны, чтобы в эту четверку не входил другой локальный максимум кластера. По центру тяжести энергосодержания в этой четверке вычисляются координаты фотона (x, y) при помощи описанной выше методики определения корректирующей функции, см. формулы (1.13) и (1.14). Далее, с учетом этих координат восстанавливается “форма” электромагнитного ливня с единичной энергией (1.20). В качестве начальной оценки значения энергии ливня принимается величина E_4 , нормированная на аналогичную сумму e_4 восстановленного ливня единичной энергии. Затем для каждого элемента кластера с использованием формы найденного электромагнитного ливня и оценки его энергии вычисляются ожидаемые энергосодержания от данного ливня и вычитаются из измеренных значений энергий в элементах кластера. На модифицированном таким образом кластере проводится поиск нового ливня и т.д.

После нахождения очередного ливня вычисляется величина χ^2 - сумма квадратов отклонений экспериментальных значений амплитуд в элементах кластера A^{ex} от ожидаемых A^{th} :

$$\chi^2 = \sum_{i,l} (A_{il}^{ex} - A_{il}^{th})^2 / A_{il}^{th}. \quad (1.25)$$

Для нумерации амплитуд здесь используется двойной индекс il , причем суммирование ведется по всем элементам кластера. Поиск новых ливней в кла-

стере прекращается, когда значение χ^2 , деленное на число степеней свободы, не уменьшается при введении нового ливня в кластере (число степеней свободы принято равным числу элементов в кластере минус утроенное число найденных ливней в кластере), либо когда оценка энергии очередного ливня по четырем ячейкам с максимальным энерговыделением E_4 становится меньше некоторой минимальной величины E_{min} . Последняя была подобрана при настройке программы реконструкции так, чтобы обеспечить как можно более низкий порог регистрации фотонов в спектрометре ГАМС.

Если нормированная на число степеней свободы величина χ^2 после окончания поиска ливней в кластере превышает некоторое пороговое значение χ_{min}^2 , вызывается процедура минимизации, уточняющая χ^2 , а также значения координат (x_n, y_n) и энергий E_n найденных ливней с помощью квазилинейного фита [52]. При этом ожидаемое значение амплитуды A_{il}^{th} в элементе кластера il выражается через параметры всех N_γ ливней в кластере в виде:

$$A^{th} = \sum_{n=1}^{N_\gamma} E_n \phi(x_n - i, y_n - l). \quad (1.26)$$

В случае, если в результате такого фита величина χ^2 становится меньше порогового значения χ_{min}^2 , кластер считается полностью реконструированным, и начинается реконструкция следующего кластера. В ином случае область кластера, дающая аномально большой вклад в распределение χ^2 локализуется, и к этой области применяется процедура разделения двух сильно перекрывающихся ливней. На практике очень часто такой областью является отдельный кластер. Поэтому ниже мы рассмотрим процедуру разделения ливней применительно к кластеру. Существенной особенностью такого кластера является наличие в нем лишь одного локального максимума и, следовательно, рассмотренными выше методами дать оценки координат и энергий перекрывшихся ливней не представляется возможным.

В этом случае для получения оценок параметров перекрывшихся ливней можно использовать метод моментов. Суть этого метода состоит в том, что распределение энерговыделения в кластере даже если нет эвристических

указаний (анализ вершин в кластере) на наличие двух фотонов, определяется в конечном счете координатами и энергиями всех попавших в кластер фотонов, и, следовательно, моменты энергосвыделения в кластере могут быть использованы для получения начальных оценок параметров ливней.

Следуя работе [53], в той связи мы вначале изложим процедуру разделения двух ливней в одномерном случае, а затем дадим ее обобщение на случай двумерного энергосвыделения, имеющего место в спектрометрах типа ГАМС. Используя свойство аддитивности энергосвыделения в калориметре, запишем плотность совместного распределения энергосвыделения двух ливней в виде

$$\frac{dE}{dx} = E_1\phi(x - x_1) + E_2\phi(x - x_2), \quad (1.27)$$

где E_i и x_i - энергии и координаты ливней, $\phi(x)$ - нормированная на единицу плотность энергосвыделения одиночного ливня (мы пренебрегаем здесь логарифмической зависимостью формы ливня от энергии). Тогда начальный момент n -го порядка энергосвыделения (1.27) можно выразить через центральные моменты одиночного ливня μ_j и параметры ливней в кластере

$$M_n = \int x^n dE = \sum_{j=0}^n C_n^j (E_1 x_1^{n-j} \mu_j + E_2 x_2^{n-j} \mu_j), \quad (1.28)$$

где $C_n^j = n!/(n-j)!$, $\mu_j = \int x^j \phi(x) dx$. Уравнение (1.28) является исходным для получения системы уравнений в методе моментов. Оно легко приводится к виду:

$$m_n = E_1 x_1^n + E_2 x_2^n, \quad (1.29)$$

где моменты m_n определяются рекуррентным соотношением ($m_0 = M_0$)

$$m_n = M_n - \sum_{j=1}^n C_n^j m_{n-j} \mu_j.$$

При $n = 0, 1, 2, 3$ система уравнений (1.27) сводится к квадратному уравнению. Решение системы имеет вид

$$x_{1,2} = t + \frac{m_1}{m_0} \pm \sqrt{t^2 + m_2 - \frac{m_1^2}{m_0}}, \quad E_{1,2} = m_0 \frac{1 - x_{2,1}}{x_{1,2} - x_{2,1}}, \quad (1.30)$$

где

$$t = \frac{m_3 m_0^2 - 3m_2 m_2 m_0 + 2m_1^2}{2(m_2 m_0 - m_1^2) m_0}.$$

К рассмотренному одномерному случаю можно свести задачу определения параметров двух распределений одинаковой формы и в n -мерном пространстве, если в качестве оси X выбрать главную ось эллипсоида суммарного распределения. В частности, в двумерном пространстве (случай распределения энерговыведения в годоскопических спектрометрах типа ГАМС) соответствующие уравнения моментов имеют вид:

$$m_{nk} = E_1 x_1^n y_1^k + E_2 x_2^n y_2^k, \quad (1.31)$$

где m_{nk} определены рекуррентным соотношением ($m_{00} = M_{00}$):

$$m_{nk} = M_{nk} - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^k C_n^l m_{k-j} (E_1 x_1^{n-l} y_1^{k-j} \mu_{lj} + E_2 x_2^{n-l} y_2^{k-j} \mu_{lj}), \quad (1.32)$$

а $\mu_{lj} = \int x^l y^j \phi(x, y) dx dy$ - центральные моменты одиночного ливня. Решение системы (1.31) при ($n + k \leq 3$) есть

$$x_i = r_i \cos \phi_i + M_{10}/M_{00}, \quad y_i = r_i \sin \phi_i + M_{01}/M_{00}, \quad (1.33)$$

$$r_{1,2} = \pm \frac{g_3}{2g_2} + \sqrt{1 + \frac{g_3}{4g_2^2}}, \quad E_{1,2} = \frac{m_{00} r_{1,2}}{r_1 + r_2},$$

где

$$\cos^2 \phi_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{m_{20}^2}{m_{20}^2 + m_{02}^2} + \frac{m_{20}^2}{m_{20}^2 + m_{11}^2} + \frac{m_{11}^2}{m_{11}^2 + m_{02}^2} \right),$$

$$g_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{30}}{\cos \phi_1} + \frac{m_{21}}{\sin \phi_1} \frac{m_{12}}{\cos \phi_1} + \frac{m_{03}}{\sin \phi_1} \right),$$

$$g_2 = m_{20} + m_{02}, \quad \phi_2 = \phi_1 + \pi,$$

другие детали см. в оригинальной работе [53].

При обработке данных реального эксперимента в качестве оценок моментов энерговыведения в кластере использовались величины:

$$M_n = \sum_{il} x_i^n A_{il}, \quad M_{nk} = \sum_{il} x_i^n y_i^k A_{il}, \quad (1.34)$$

где A_{il} - энерговыделение в il -той ячейке кластера, а (x_i, y_l) - координаты центра il -той ячейки кластера. Из центральных моментов энерговыделения одиночных ливней были оставлены лишь дисперсии (константа настройки процедуры), все нечетные моменты полагались равными нулю. Уравнения (1.33) использовались далее для оценки координат и энергий перекрывшихся ливней, которые подавались в качестве начальных значений параметров на вход процедуры квазилинейного фита энерговыделения в кластере, основанной на функционале (1.25). И затем управление вновь передавалось процедуре реконструкции кластера. Таким образом, по окончании реконструкции событие в спектрометре ГАМС характеризовалось множественностью N_γ , а также энергиями и координатами реконструированных фотонов: E_n, X_n, Y_n , $n = 1, \dots, N_\gamma$.

При этом следует отметить, что процедура реконструкции событий с годоскопических спектрометров типа ГАМС продолжала развиваться. Заинтересованного в этой тематике читателя мы отсылаем к более свежим работам [54, 55], хотя они уже не имеют прямого отношения к обработке данных вошедших в настоящую диссертацию экспериментов.

Изложенный выше метод моментов применительно к определению координат и энергий сильно перекрывающихся ливней в кластере решает задачу начальной оценки параметров перекрывающихся ливней для последующего их использования в процедуре квазилинейного фита энерговыделения в кластере. Однако задача идентификации одиночного ливня или двух перекрывающихся ливней в кластере при этом не решается.

Вместе с тем, как стало понятно заметно позже (излагаемая ниже методика не применялась для анализа данных со спектрометров ГАМС), метод моментов может быть также эффективно использован и для дифференциации кластеров с одиночным или двумя перекрывающимися ливнями. Например, в эксперименте ALICE [40] эта задача применительно к спектрометру PHOS [41] с физической точки зрения эквивалентна дифференциации высокоэнергичных кластеров от прямых фотонов или от двух перекрывшихся

ливней от распадов нейтральных пионов, см. [3]. Интерес при этом представляют для нас кластеры только с одним локальным максимумом, поскольку кластеры с двумя локальными максимумами заведомо не имеют отношения к однофотонным кластерам (прямым фотонам). В качестве характеристики энерговыделения в таком кластере было предложено использовать моменты M_{nk} , см. уравнение (1.34), в системе координат с центром в ячейке с максимальным энерговыделением в кластере. При этом матрица моментов M_{nk} с $n + k = 2$ использовалась для нахождения ее собственных векторов (\vec{e}_1, \vec{e}_2) и собственных значений (λ_1, λ_2), где $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Далее моменты M_{nk} были пересчитаны к системе координат с осями вдоль найденных собственных векторов (\vec{e}_1, \vec{e}_2), подробнее см. [3]. Чтобы отличать их от начальных моментов M_{nk} мы будем ниже обозначать их как \tilde{M}_{nk} . Последние моменты были использованы в качестве существенных переменных в процедуре идентификации кластеров от прямых фотонов при помощи искусственных нейронных сетей [56]. Конкретно, в качестве существенных использовались шесть переменных: $\tilde{M}_{00}, \lambda_1, \lambda_2, \tilde{M}_{30}, \tilde{M}_{40}$ и угол ϕ , равный

$$\phi = \arccos(\vec{e}_1 \cdot \vec{X}_0 / |\vec{X}_0|),$$

где вектор \vec{X}_0 направлен от центра модуля спектрометра PHOS к центру анализируемого кластера.

Нейронная сеть включала в себя три уровня: входной (6 узлов, на которые подаются существенные переменные), промежуточный (13 узлов) и выходной (1 узел), обеспечивающий реакцию нейронной сети $S_{NN} \in (0, 1)$ на данное событие (кластер). Сеть тренировалась на двух ансамблях Монте-Карло событий, содержащих по 10 тыс. одиночных (прямых) фотонов и двухфоновых событий (от 2γ -распадов нейтральных пионов). Для определения эффективности дифференциации указанных событий были сгенерены независимые ансамбли из прямых фотонов и π^0 -мезонов по 30 тыс. событий в каждом. Результаты представлены на Рис. 1.5. Следует отметить, что при энергии кластера вплоть до 100 ГэВ указанная методика обеспечивает по-

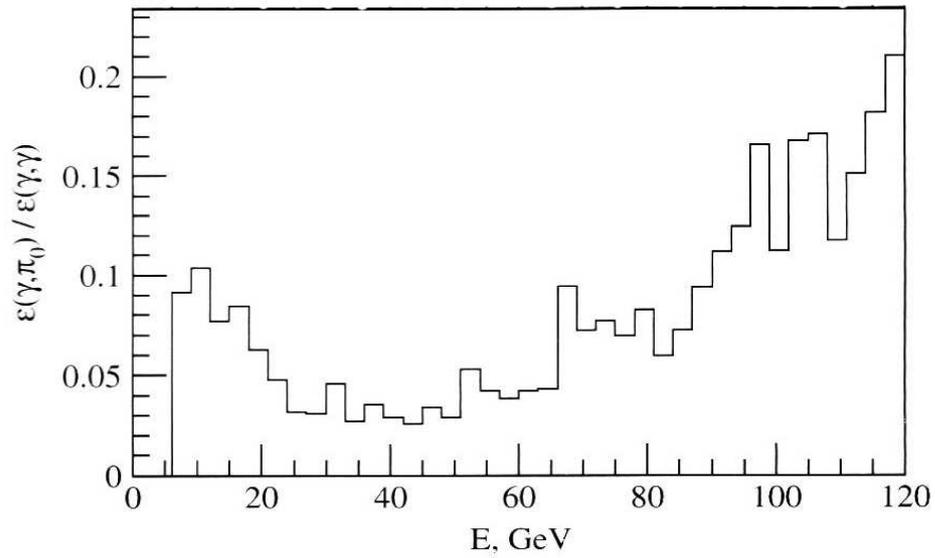


Рис. 1.5: Отношение эффективности регистрации π^0 -мезона как фотона к эффективности регистрации одиночного фотона как фотона в зависимости от энерговыделения в кластере спектрометра PHOS в эксперименте ALICE.

давление регистрации нейтральных пионов как одиночных фотонов приблизительно в 10 раз, что соответствует идентификации двух перекрывающихся ливней на расстояниях порядка $1/2$ от поперечного размера ячейки годоскопического спектрометра, другие детали см. в работе [3].

1.2.4. Кинематический анализ событий

Кинематический анализ событий, см. например [57], основан на существующей априорной информации, характерной для каждого из изучаемых каналов реакции, и преследует две цели: во-первых, выделить события конкретных каналов реакции, а, во-вторых, уточнить значения кинематических параметров событий, воспользовавшись дополнительной априорной информацией по каждому каналу реакции, и тем самым улучшить точность эксперимента. Априорная кинематическая информация, как правило, может быть представлена в виде нескольких уравнений (констрейнов, вообще говоря, различных для разных каналов реакции), которым должны удовлетворять измеренные в эксперименте параметры событий:

$$F_l^k(\vec{x}) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, L_k, \quad (1.35)$$

здесь индекс k нумерует каналы реакции, индекс l нумерует уравнения связи в канале k , а \vec{x} есть вектор измеряемых параметров в событии. Число констрейнов L_k определяет степень переопределенности измеряемых в эксперименте параметров. В силу конечной точности эксперимента измеренные параметры событий не удовлетворяют системе уравнений (1.35).

Задача кинематического анализа состоит в поиске таких значений параметров события $\{x_i\}$, которые бы минимальным образом отличались от измеренных в эксперименте, но при этом строго (т.е. с компьютерной точностью) удовлетворяли бы системе дополнительных уравнений (1.35), соответствующих данному каналу реакции. Математически эта задача сводится к поиску условного, см. (1.35), минимума функционала

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \tilde{x}_i) \frac{g_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} (x_j - \tilde{x}_j)$$

методом множителей Лагранжа, т.е. к поиску безусловного минимума функционала

$$\chi_k^2(\vec{x}, \vec{\lambda}, L_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \tilde{x}_i) \frac{g_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} (x_j - \tilde{x}_j) + \sum_l^{L_k} \lambda_l F_l^k(\vec{x}), \quad (1.36)$$

где \tilde{x}_i - измеренные значение параметра i в событии, σ_i - среднеквадратичная ошибка измерения параметра i , g_{ij} - корреляционная матрица измеренных параметров, а λ_l - множители Лагранжа.

Необходимое условие минимума применительно к функционалу (1.36) приводит к системе уравнений

$$\partial \chi_k^2(\vec{x}, \vec{\lambda}, L_k) / \partial x_i = 0, \quad \partial \chi_k^2(\vec{x}, \vec{\lambda}, L_k) / \partial \lambda_l = F_l^k(\vec{x}) = 0, \quad (1.37)$$

которая методом линеаризации [52, 57] с точностью до членов второго порядка приводится к системе линейных уравнений относительно $\Delta \vec{x}$. Решение этой системы

$$\Delta \vec{x} = -G^{-1} B L = -G^{-1} B \cdot (B G^{-1} B)^{-1} \cdot (F - B \Delta \vec{x}) \quad (1.38)$$

является одновременно и приближенным решением системы уравнений (1.37), где $G_{ij} = g_{ij} / \sigma_i \sigma_j$ - матрица ошибок измеренных параметров события, $B_{li} =$

dF_l/dx_i - матрица производных констрейнов. Выбрав в качестве следующей точки разложения новое значение вектора $\vec{x}_j = x_{j-1} + \Delta x_{j-1}$, приходим к итерационному процессу, который за несколько итераций (от 4-х до 15-и в зависимости от числа уравнений связи) приводит к решению системы уравнений (1.37) с заданной (обычно $\sim 10^{-8}$) точностью, завершая тем самым процедуру поиска минимума функционала (1.36).

По достижению минимума величина $\chi_k^2(L_k)$ для основной гипотезы распределена как статистика χ^2 с L_k степенями свободы. Поэтому в идеальном случае распределение по вероятности $P(\chi_k^2, L_k)$ должно быть равномерным. Выполнение этого условия является критерием корректности проведенного кинематического фита. В реальном эксперименте в распределении по $P(\chi_k^2, L_k)$ наблюдается пик при малых значениях вероятности, обусловленный фоновыми событиями. Отбор $P(\chi_k^2, L_k) > P_{th}^k$ позволяет их эффективно подавить.

В экспериментах на установке ГАМС-2000 каждое событие характеризовалось вектором измеренных переменных \vec{x} размерности $6 + 3N_\gamma$. Первые шесть компонент вектора описывали параметры пучковой частицы: модуль импульса, косинусы углов вектора-импульса с осями координат, поперечные координаты точки взаимодействия пучковой частицы в мишени, а также координату точки взаимодействия вдоль мишени с учетом коррекции ее положения по интенсивности черенковского света от пучковой частицы в мишени [58]. Остальные $3N_\gamma$ компонент вектора характеризовали реконструированные параметры фотонов в спектрометре ГАМС, т.е. их энергии и координаты на фронтальной плоскости спектрометра: $E_n, X_n, Y_n, n = 1, \dots, N_\gamma$. Матрица ошибок измеряемых параметров бралась диагональной, а в качестве уравнений связи использовалась разница квадратов табличных масс m_l^2 , участвующих в реакции частиц, и их выражений через измеряемые в событии переменные \vec{x} (для простоты мы опустили здесь индекс канала реакции k):

$$F_l(\vec{x}) = M_l^2(\vec{x}) - m_l^2. \quad (1.39)$$

В качестве примера, см. например [59], рассмотрим здесь кратко процедуру кинематического анализа 6-фотонных событий с целью выделения реакции

$$\pi^- p \rightarrow \eta 2\pi^0 n \rightarrow 6\gamma n. \quad (1.40)$$

Здесь были применены 4-ре уравнения связи (4С-фит), использующие известные массы нейтрона, η -мезона и двух π^0 -мезонов в конечном состоянии $\pi^- p$ -взаимодействий. Проблема неоднозначной идентификации пар γ -квантов, образовавшихся в событии от двухфотонных распадов мезонов, решалась последовательным перебором и фитом всех возможных комбинаций разбиения γ -квантов на пары. Так в рассматриваемом примере мы имели в каждом событии 45 различных комбинаций разбиения γ -квантов на пары, соответствующие распаду системы $\eta\pi^0\pi^0$ на шесть фотонов. В качестве истинной комбинации выбиралась та, для которой величина χ^2 после фита была минимальной.

Что касается процедуры дифференциации различных кинематических гипотез, каждое событие независимо фитировалось как по основной, так и по всем фоновым (конкурирующим) гипотезам. Так для выделения реакции (1.40) в качестве конкурирующих рассматривались следующие гипотезы:

$$\pi^- p \rightarrow 2\omega n \rightarrow 2(\pi^0\gamma)n \rightarrow 6\gamma n, \quad (1.41)$$

$$\pi^- p \rightarrow 3\pi^0 n \rightarrow 6\gamma n, \quad (1.42)$$

$$\pi^- p \rightarrow 2\eta\pi^0 n \rightarrow 6\gamma n, \quad (1.43)$$

$$\pi^- p \rightarrow 3\eta n \rightarrow 6\gamma n, \quad (1.44)$$

$$\pi^- p \rightarrow \eta' 2\pi^0 n \rightarrow 6\gamma n, \quad (1.45)$$

$$\pi^- p \rightarrow \eta'\eta\pi^0 n \rightarrow 6\gamma n, \quad (1.46)$$

$$\pi^- p \rightarrow \eta' 2\eta n \rightarrow 6\gamma n \quad (1.47)$$

и т.д. Всего 8 гипотез, подробнее см. в [60]. По окончанию кинематического фита каждое событие характеризовалось, таким образом, полученными

значениями $\chi_k^2(L_k)$ для всех указанных выше гипотез. Окончательный отбор искомым событиям осуществлялся по соотношению вероятностей $P(\chi^2 > \chi_k^2(L_k), L_k)$ для основной и конкурирующих гипотез.

1.3. Моделирование событий в спектрометрах ГАМС

1.3.1. Принципы моделирования событий

Характерной особенностью спектрометров типа ГАМС является сильная зависимость амплитуд ливня A_{il} от его расположения относительно ячеек спектрометра. При этом сумма амплитуд ΣA_{il} с точностью до флуктуаций является величиной постоянной. Далее, даже наиболее энергичные ливни занимают область размером не более чем 5х5 счетчиков, что позволяет измерять координаты и энергии большого числа фотонов с высокой точностью.

Вместе с тем, как отмечалось выше, задача разделения перекрывающихся ливней в спектрометре ГАМС является весьма нетривиальной. Эффективность разделения существенно зависит от множества факторов: энергий γ -квантов, флуктуаций ливней, взаимного расположения ливней и их расположения относительно ячеек спектрометра, а также от использованной программы реконструкции событий в спектрометре. Поэтому для моделирования событий в спектрометрах ГАМС и определения эффективности их регистрации необходима детальная информация об отклике спектрометра - конфигурациях амплитуд A_{il} , возникающих при попадании в него γ -квантов с заданными значениями координат и энергий.

В силу вышеизложенного программа моделирования (программа Монте-Карло) событий в спектрометрах ГАМС включала в себя процедуру моделирования электромагнитных ливней в спектрометре. Полная генерация событий проводилась по следующей схеме:

- вначале в соответствии с кинематикой изучаемой реакции методом Монте-Карло (МК) определялись 4-импульсы всех γ -квантов в конечном

состоянии события, определялись их энергии, а также координаты попадания на фронтальную поверхность спектрометра ГАМС;

- затем по известным координатам и энергиям γ -квантов проводилась генерация соответствующих электромагнитных ливней в спектрометре, включая флуктуации ливней в ячейках спектрометра; при этом в соответствии с принципом аддитивности энерговыделение от перекрывающихся ливней в общих ячейках суммировалось;
- наконец, вызывалась процедура оцифровки энерговыделения в ячейках спектрометра, и выходная информация по-событийно записывалась на магнитные носители в формате, полностью идентичном формату данных реального эксперимента.

Такая методика моделирования событий позволяла вести обработку МК-событий при помощи той же системы программ реконструкции, отбора и кинематического анализа, что и при анализе данных конкретного эксперимента. Определенная в результате эффективность регистрации изучаемого процесса естественно учитывала аксептанс установки, все особенности программ реконструкции и кинематического анализа, а также влияние использованных критериев отбора экспериментальных событий.

Возвращаясь к методике моделирования ливней в спектрометрах ГАМС, отметим, что в силу исторических причин в экспериментах на установках ГАМС-2000 и ГАМС-4000 использовались разные процедуры генерации ливней. В первом случае в программе МК использовался банк реальных фотонных ливней, зарегистрированных в условиях реального эксперимента, а во втором случае - метод среднего ливня. К изложению обеих методик мы переходим ниже.

1.3.2. Банк реальных фотонных ливней

Банк реальных фотонных ливней [4, 47], использовавшийся для моделирования событий в спектрометре ГАМС-2000, представляет собой множество

амплитуд A_{ij} неперекрывающихся фотонных ливней, зарегистрированных в реальном эксперименте и упорядоченных по энергии и координатам таким образом, чтобы их было удобно использовать в процедуре генерации событий методом Монте-Карло. В качестве источника γ -ливней были использованы события двухфотонного распада η -мезонов, образующихся в зарядовообменной реакции



при импульсе 30 ГэВ/с. Для создания банка реальных ливней была проведена специальная экспозиция спектрометра ГАМС-2000 на π^- -пучке, где расстояние от водородной мишени до спектрометра было выбрано равным 12 м. В указанной геометрии эксперимента минимальное расстояние γ -квантов в плоскости спектрометра составляло около 40 см. Возникающие при этом ливни полностью разделяются и расположены в различных кластерах. Распределение ливней по энергии является равномерным. Таким образом, реакция (1.48) может служить источником стандартных фотонных ливней с энергией в диапазоне, начиная от пороговой энергии спектрометра, и до максимальной энергии, определяемой импульсом пучка (30 ГэВ/с в нашем случае).

С целью создания банка ливней были отобраны события с двумя γ -квантами в конечном состоянии реакции и эффективной массой в пределах пика, соответствующего двухфотонному распаду η -мезона. Далее, если ливни не были искажены центральным отверстием в спектрометре ГАМС-2000, через которое пропускались не провзаимодействовавшие с мишенью частицы пучка, энергия и координаты каждого ливня вместе со значениями амплитуд A_{ij} в кластере отбирались для формирования банка ливней. Окончательно, после всех отборов, банк содержал более 150 тыс. различных фотонных ливней.

В основе процедуры моделирования событий при помощи банка ливней лежит подмена "истинных" ливней близкими к ним по энергии и координатам ливнями из банка. При этом структура банка определяется, во-первых, размером ливней, зависимостью их формы от энергии, симметрией спектро-

метра и т.д., а во-вторых, требованием, чтобы искажения, возникающие при такой подмене, соответствовали точности измерения параметров ливней в спектрометре.

Размер всех ливней в банке был фиксирован. Каждый ливень представлял собой набор из 25 амплитуд A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) с максимальной амплитудой A_{33} в центре с тем, чтобы даже наиболее энергичные ливни помещались в банк полностью.

Далее, в силу инвариантности наборов амплитуд A_{ij} относительно смещения координат ливней на целое число ячеек спектрометра, в банке ливней достаточно иметь лишь координаты ливней относительно центра ячейки с максимальной амплитудой (собственные координаты ливня). Более того, простые трансформационные свойства набора амплитуд A_{ij} при отражении ливня относительно осей, проходящих через центр ячейки 33 параллельно ее сторонам, позволяет преобразовать все ливни к стандартному виду, т.е. с положительными значениями собственных координат ливней и максимальным суммарным энерговыделением в ячейках 33, 34, 43 и 44.

Как уже отмечалось выше, точность измерения координат ливней в спектрометре ГАМС-2000 составляет 1.4 мм. Область изменения собственных координат ливней, приведенных к стандартному виду ($0 < X, Y < 19$ мм), была разбита на 36 одинаковых ячеек размером $\Delta X \times \Delta Y = 19/6 \times 19/6$ мм² каждая. Среднеквадратичная ошибка координат ливня, возникающая при замене данного ливня случайным ливнем из банка ливней, равна $\sigma_x = \Delta X/\sqrt{6}$, что соответствует реальной точности измерения координат ливней в спектрометре.

Зависимость формы ливня от энергии фотона является слабой. Тем не менее, для учета этой зависимости вся доступная область энергий ливней была разбита на 4-ре интервала: 0.5-7.5 ГэВ, 7.5-15 ГэВ, 15-22.5 ГэВ и 22.5-29.5 ГэВ.

Перечисленные особенности в совокупности полностью определяют минимальный объем сегмента банка, т.е. наименьший набор ливней достаточный

для генерации любого события перезарядки в спектрометре. Сегмент состоит из 144 ливней: по одному случайному ливню в каждом из 36 элементов области изменения собственных координат ливней для каждого из 4-х указанных выше интервалов энергии. Полный банк ливней представляет собой множество сегментов, последовательно записанных на магнитный носитель.

Генерация событий с использованием банка реальных ливней осуществлялась следующим образом:

- по известным из кинематики координатам и энергии фотона в спектрометре вычислялись собственные координаты и определялся соответствующий подинтервал энергии; далее производилась выборка требуемого ливня из сегмента банка;
- если собственные координаты оказывались при этом вне области определения координат стандартизованных ливней в банке ($0 < X, Y < 19$ мм), выбранный ливень посредством отражения относительно одной или обеих осей симметрии, указанных выше, преобразовывался от стандартного к требуемому виду;
- перед "помещением" в ячейки спектрометра амплитуды ливня A_{ij} нормировались так, чтобы их сумма была пропорциональна "измеренной" энергии фотона; коэффициент нормировки определялся из условия, чтобы распределение по суммарной энергии событий МК имело среднее значение, совпадающее с экспериментальным;
- "измеренная" энергия фотона полагалась распределенной по Гауссу со средним значением, равным "истинной" энергии фотона E_γ и относительным среднеквадратичным отклонением $\sigma_E/E = b/\sqrt{E_\gamma} + c$, при этом параметры b и c были подобраны так, чтобы распределения по суммарной энергии и эффективной массе МК-событий имели такие же ширины, что и для экспериментальных событий;
- если при выборке очередного ливня из сегмента банка общее число уже

использованных ливней превышало некоторое число, скажем 36, то с магнитного носителя считывался следующий сегмент банка, и генерация события продолжалась уже с новым сегментом.

Дальнейшие детали см. в работе [4].

1.3.3. Метод среднего ливня

Как уже отмечалось выше, в программе МК для спектрометра ГАМС-4000 генерация фотонных ливней проводилась методом среднего ливня. Для этого использовалась параметризация формы электронных ливней в ГАМС-4000, полученная на основе данных калибровки спектрометра широким электронным пучком, см. формулу (1.16). При генерации фотонных ливней в ГАМС-4000 по вычисленным значениям координат фотонов в спектрометре определялся соответствующий набор амплитуд a_{ij} среднего ливня (1.16) в спектрометре. Амплитуды ливня далее нормировались так, чтобы их сумма была пропорциональна энергии фотона E_γ . Коэффициент пропорциональности α определялся из условия, чтобы распределение по суммарному энерговыделению МК-событий имело среднее значение, совпадающее с экспериментальным для данного класса событий.

Наконец, энерговыделение *в каждой ячейке* ливня полагалась распределенным по Гауссу со средним значением, равным неискаженному энерговыделению фотона в этой ячейке $A_{ij} = \alpha E_\gamma a_{ij}$ и относительным среднеквадратичным отклонением $\sigma_{A_{ij}}/A_{ij} = b'/\sqrt{E_\gamma} + c'$. При этом параметры b' и c' , как и в случае использования банка ливней, были подобраны так, чтобы распределения по суммарной энергии и эффективной массе МК-событий имели такие же ширины, что и для экспериментальных событий. Таким образом, в методе среднего ливня в отличие от метода, основанного на банке реальных фотонных ливней, флуктуации энерговыделения в отдельных ячейках ливня предполагаются некоррелированными и не учитываются.

В заключение данного раздела отметим, что уже на достаточно поздней

стадии анализа данных со спектрометров ГАМС-2000 и ГАМС-4000 с методической целью было проведено прямое сравнение обоих описанных выше методов генерации ливней, т.е. метода реальных фотонных ливней и метода среднего ливня. Для этого был проведен парциально-волновой анализ данных реакции $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ на установке ГАМС-2000 при импульсе 38 ГэВ/с, где эффективность регистрации была посчитана одновременно обоими методами. Сравнение показало, что результаты ПВА совпадают при этом с точностью до статистических флуктуаций. Откуда были сделаны выводы, что оба указанных метода генерации ливней в спектрометрах типа ГАМС эквивалентны.

1.4. Параметризация многомерной эффективности

В методе МК эффективность регистрации той или иной реакции характеризуется, в конечном счете, ансамблем событий, которые удовлетворяют всем критериям отбора в эксперименте, включая отборы событий на стадиях выработки триггера, реконструкции, кинематического и физического анализа событий. Вместе с тем при обработке данных эксперимента довольно часто возникает необходимость явного аналитического представления эффективности в пространстве существенных переменных изучаемого процесса, см. примеры в следующей главе. Для пространств малой размерности ($m \leq 2$) эта задача может быть решена при помощи параметризации одно и двумерных распределений событий МК. В пространствах большей размерности такой подход вызывает существенные трудности, экспоненциально возрастающие с размерностью пространства.

В настоящем разделе, следуя работам [5, 6, 7], мы рассмотрим задачу параметризации многомерной эффективности рядами Фурье, исходя из принципа максимума энтропии. Эта методика одинаково хорошо работает как для малой, так и высокой размерности пространства.

1.4.1. Постановка задачи

Пусть из МК-множества $E_o\{i\}$ с N_o событиями МК-подмножество $E\{i\}$ с N событиями удовлетворяет всем условиям и критериям отборам данного эксперимента. При этом каждое событие характеризуется вектором измеряемых переменных \mathbf{x} размерности m , заданных на гиперкубе $\Delta_m : -1 \leq x_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, m$, – с объемом $V_m = 2^m$. Тогда в общем случае эффективность регистрации ε как функция вектора \mathbf{x} может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} f_{\lambda}(\mathbf{x}) \quad (1.49)$$

по полной системе ортонормированных функций $f_{\lambda}(\mathbf{x})$ на гиперкубе Δ_m . Коэффициенты ряда ε_{λ} равны

$$\varepsilon_{\lambda} = \int_{\Delta} \varepsilon(\mathbf{x}) f_{\lambda}(\mathbf{x}) d^m \mathbf{x}. \quad (1.50)$$

Для оценки интеграла (1.50) на подмножестве $E\{i\}$ МК-событий можно, см. например [61], использовать величину³:

$$\tilde{\varepsilon}_{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_i f_{\lambda}(\mathbf{x}_i), \quad (1.51)$$

Здесь мы предполагаем, что исходный ансамбль МК-событий распределен равномерно по гиперкубу Δ_m . Тогда оценка дисперсии σ_{λ}^2 коэффициента $\tilde{\varepsilon}_{\lambda}$ при больших N дается формулой:

$$\sigma_{\lambda}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_i (f_{\lambda}(x_i) - \tilde{\varepsilon}_{\lambda})^2, \quad (1.52)$$

которая характеризует точность вычислений коэффициентов ряда. Если ограничиться в сумме (1.49) конечным числом членов ряда (например, оставить только члены, для которых $\sigma_{\lambda} \leq \tilde{\varepsilon}_{\lambda}$), то уравнения (1.49-1.52) в сравнительно простых случаях практически решают задачу параметризации эффективности Монте-Карло. Однако, чтобы эффективно использовать этот метод в более сложных многомерных случаях, необходимо решить несколько принципиальных проблем.

³Здесь и ниже для простоты мы полагаем, что функция $\varepsilon(\mathbf{x})$ нормирована на гиперкубе Δ_m на единицу, имея в виду, что общий нормировочный множитель N/N_o возвращает истинные значения коэффициентов ε_{λ} для случая реального эксперимента.

1.4.2. Сходимость процедуры параметризации

Основная причина, которая ограничивает применение Фурье-параметризации в многомерных пространствах - это проблема значимости членов разложения, а также тесно связанная с ней проблема устойчивости разложения в ряд. В этой связи следует отметить, что суммирование бесконечных рядов Фурье с приближенными коэффициентами (пример не корректно поставленной задачи) не устойчиво по отношению к малым (исчезающим) вариациям коэффициентов разложения. Методы решения таких задач хорошо известны, см. [62]. Суть их состоит в такой "естественной" переформулировке задачи, которая делает решение устойчивым, или регулярным.

Следуя работам [5, 6, 7], мы ниже рассмотрим регуляризацию Фурье-разложения (1.49) эффективности регистрации, основанную на принципе максимума энтропии

$$h(\varepsilon) = - \int_{\Delta} \varepsilon(\mathbf{x}) \ln \varepsilon(\mathbf{x}) d^m \mathbf{x}, \quad (1.53)$$

который является мощным средством при решении не корректно поставленных задач [63]. Цель такой регуляризации состоит в том, чтобы отбросить "шумящие" члены ряда, случайным образом искажающие параметризацию. Оценки энтропии (1.53) и ее дисперсии на множестве МК-событий $E\{i\}$ равны соответственно:

$$\tilde{h}(\varepsilon) = -\frac{1}{N} \sum_i \ln \varepsilon(\mathbf{x}_i), \quad (1.54)$$

$$\tilde{\sigma}_h^2 = \frac{1}{N} \sum_i (\ln \varepsilon(\mathbf{x}_i) - \tilde{h}(\varepsilon))^2. \quad (1.55)$$

Первая из этих величин может быть использована для регуляризации рядов Фурье. Численные расчеты показали однако, что более эффективной статистикой для регуляризации Фурье-параметризаций на дискретных множествах является не энтропия, а статистика $H(\varepsilon)$

$$H(\varepsilon) = \tilde{\sigma}_h / \tilde{h}(\varepsilon), \quad (1.56)$$

весьма близкая к энтропии. Если упорядочить коэффициенты разложения (1.49) ε_λ в порядке возрастания шумовой компоненты (эту величину можно

характеризовать отношением $\sigma_\lambda/\tilde{\varepsilon}_\lambda$, то при прочих равных условиях число членов в разложении следует ограничить таким числом L , при котором статистика $H(\varepsilon)$ достигает минимума. Эффективность критерия, основанного на этой статистике, может быть проиллюстрирована численным экспериментом, см. Рис. 1.6, где представлены результаты численного восстановления одномерного распределения $\rho(x) \sim 1/(1 + 3(x^2 - 0.25)^2)$ конечным рядом полиномов Лежандра на множестве в 4000 событий МК. Как видно из рисунка, добавление всего одного дополнительного члена ряда по отношению к оптимальному существенно увеличивает шумовую составляющую.

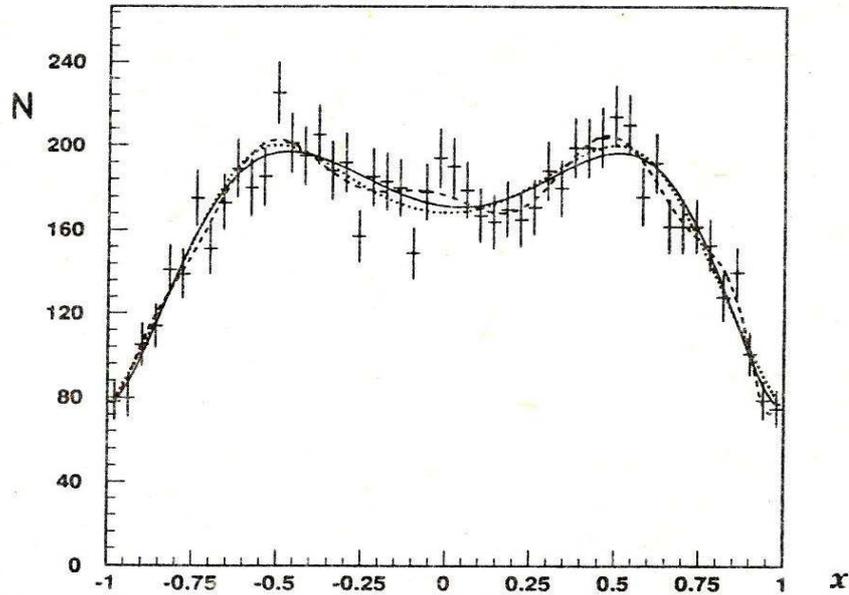


Рис. 1.6: Результаты численного восстановления одномерного распределения $\rho(x) \sim 1/(1 + 3(x^2 - 0.25)^2)$ рядом полиномов Лежандра по множеству $E\{i\}$, содержащему 4000 МК событий с указанной плотностью распределения. Сплошная линия — оптимальная параметризация, основанная на статистике $H(\varepsilon)$; штриховая линия — оптимальная параметризация с еще одним дополнительным членом; точечная линия — истинное распределение с плотностью $\rho(x)$.

Последовательный Фурье-анализ эффективности МК требует однако введения еще двух статистик: $S(\varepsilon)$ и $\chi_1^2(\varepsilon)$. Первая из них (детали см. в [5]) равна:

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=0}^L \left| \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_\lambda(\mathbf{x}_i)}{\varepsilon(\mathbf{x}_i)} - a_\lambda \right) \right|, \quad (1.57)$$

где $a_\lambda = \frac{1}{V_m} \int_{\Delta_m} f_\lambda(\mathbf{x}) d^m \mathbf{x}$, в качестве оценки которой используется величина:

$$a_\lambda = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} f_\lambda(\mathbf{x}_i). \quad (1.58)$$

Статистика $S(\varepsilon)$ может быть использована для дифференциации случаев везде ненулевой эффективности в гиперкубе Δ_m от таковых, где эффективность зануляется в некоторых областях гиперкуба Δ_m . В первом случае $S(\varepsilon) \sim L/\sqrt{N}$ и, следовательно, при больших N статистика $S(\varepsilon) \rightarrow 0$. В других случаях $S(\varepsilon) \sim const > 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Вторая статистика в простейшем случае есть $\chi_1^2(\varepsilon)$ с одной степенью свободы:

$$\chi_1^2(\varepsilon) = \frac{(1 - E(\varepsilon))^2}{D(\varepsilon)}, \quad (1.59)$$

где величины

$$E(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}_i)}, \quad D(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x}_i)} - E(\varepsilon) \right]^2$$

являются оценками доли объема областей в гиперкубе Δ_m с ненулевой эффективностью и ее дисперсии, соответственно. Статистика $\chi_1^2(\varepsilon)$ характеризует, таким образом, качество параметризации эффективности, найденной на основе распределения событий в подмножестве $E\{i\}$, в случае если $\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$ везде в гиперкубе Δ_m . Вместо статистики χ_1^2 можно использовать статистику χ_L^2 с L степенями свободы как более мощную статистику качества параметризации:

$$\chi_L^2(\varepsilon) = \sum_{\lambda=0}^L \frac{(a_\lambda - E_\lambda(\varepsilon))^2}{D_\lambda(\varepsilon)}, \quad (1.60)$$

где

$$E_\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_\lambda(\mathbf{x}_i)}{\varepsilon(\mathbf{x}_i)}, \quad D_\lambda(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{f_\lambda(\mathbf{x}_i)}{\varepsilon(\mathbf{x}_i)} - E_\lambda(\varepsilon) \right]^2.$$

Если эффективность зануляется в некоторых областях Δ_m , то вычисление статистик (1.54-1.60) следует проводить по областям, где $\varepsilon(\mathbf{x}) > \varepsilon_{min}$, детали см. в [7]. Эмпирическая величина ε_{min} определяется точностью вычислений, т.е. в конечном счете - числом событий МК, использованных для

нахождения эффективности. В частности, максимальная величина модуля отрицательных значений $\varepsilon(\mathbf{x})$ в Δ_m может быть взята в качестве оценки ε_{min} . Одновременно эта феноменологическая величина определяет и области нулевой эффективности в гиперкубе как таковые, где $\varepsilon(\mathbf{x}) < \varepsilon_{min}$.

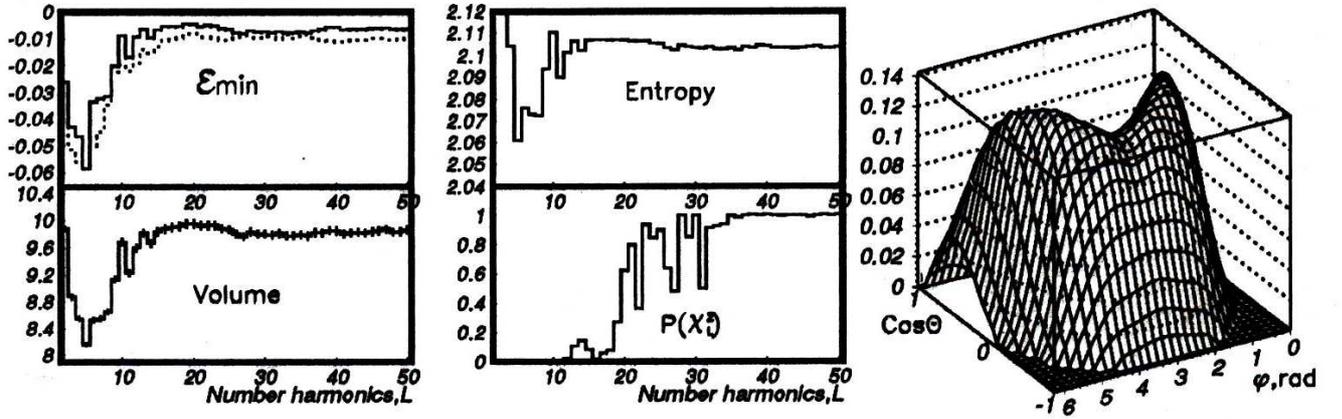


Рис. 1.7: Параметризация двумерного распределения (1.61), оптимальное значение $L = 20$, при котором $P(\chi_L^2, L) = 62\%$, подробности см. в тексте.

В качестве иллюстрации эффективности описанной выше методики на Рис. 1.7 справа представлена полученная параметризация в виде ряда сферических гармоник двумерного распределения

$$\varepsilon(\theta, \phi) \sim \sin^2\theta \cdot e^{-(2\phi^2 - \cos\theta)^2} - 0.1 \quad (1.61)$$

с заметными областями нулевых значений плотности вероятности при $\cos\theta \simeq -1$ на множестве в 50 тыс. Монте-Карло событий (при $\varepsilon(\theta, \phi) < 0$ плотность распределения событий (1.61) полагалась равной нулю). А на четырех рисунках слева здесь же представлены зависимости параметра ε_{min} , объема ненулевой эффективности V , энтропии и вероятности $P(\chi_L^2, L)$, см. (1.60), от числа гармоник L , использованных для параметризации распределения (1.61). В соответствии с этими рисунками для параметризации было использовано $L = 20$ гармоник, что соответствует описанию полученной параметризации ансамбля МК событий с вероятностью $P(\chi_L^2, L) = 62\%$, тогда как эта же величина для оригинального распределения (1.61) равна 65%, подробнее см. [7].

Успешное применение описанной выше методики для параметризации эффективности регистрации событий конкретной реакции в условиях реального эксперимента демонстрируется на Рис.1.8, где показаны двумерные срезы 3-мерной эффективности регистрации событий реакции $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$ при $\cos\Theta_{GJ} = 0.5$ и $\Phi_{TY} = \pi$ в эксперименте NA12 на установке ГАМС-4000 при импульсе 100 ГэВ/с, а также, забегая вперед, на Рис. 2.3 в главе 2, где показан срез этой же эффективности, но при $M_{\eta\pi^0}=1.32$ ГэВ⁴. На Рис. 1.8b и особенно на Рис. 2.3 ясно видны области нулевой эффективности регистрации событий этой реакции вблизи значений $\cos\theta_{GJ} = -1$.

Другой пример — эффективность регистрации реакции $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ при импульсе 38 ГэВ/с в эксперименте на установке ГАМС-2000, можно найти в главе 3 на Рис. 3.2.

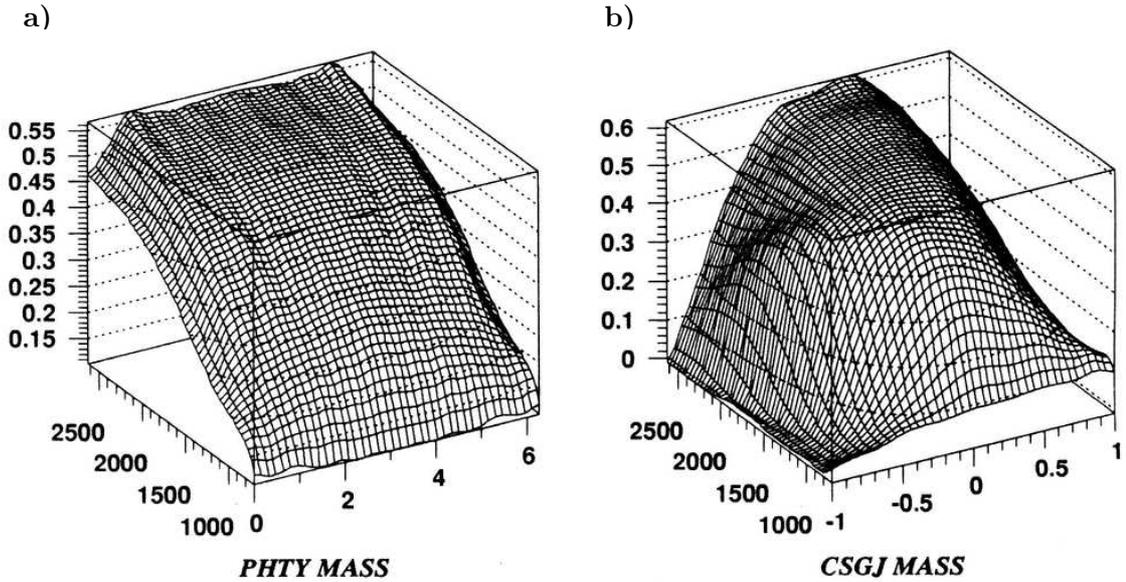


Рис. 1.8: Срезы 3-мерной эффективности регистрации реакции $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$ при импульсе 100 ГэВ/с в эксперименте NA12 [18] как функции переменных $M_{\eta\pi^0}$, $\cos\Theta_{GJ}$ и Φ_{TY} : а) срез $\cos\Theta_{GJ} = 0.5$, б) срез $\Phi_{TY} = \pi$. Срез эффективности при $M_{\eta\pi^0} = 1.32$ ГэВ смотри на Рис. 2.3, $\varepsilon_{min} = 0.008$.

1.4.3. Уменьшение числа членов разложения

Наконец, для полноты изложения остановимся здесь кратко и на проблеме уменьшения числа членов Фурье-разложения. Мы рассмотрим три про-

⁴Для простоты здесь и далее в этой работе для эффективной массы частиц и систем частиц мы будем, в основном, использовать величины МэВ и ГэВ вместо более строгих МэВ/с² и ГэВ/с².

стных метода, совместное применение которых при современном уровне развития вычислительной техники позволяет, по-видимому, проводить параметризацию эффективности в пространствах с размерностью до 10 существенных переменных.

Первый метод состоит в подходящей замене переменных. Если, например, зависимость эффективности от некоторых переменных является экспоненциальной (или начальное распределение МК-событий по каким либо переменным является экспоненциальным, скажем, t , p_T - распределения), то использование логарифма указанных переменных может существенно уменьшить число членов разложения.

Второй метод основан на специальном выборе системы ортогональных функций $f_\lambda(\mathbf{x})$ как произведений одномерных ортогональных функций $\psi_k^{l_k}(x_k)$ по каждой из переменных x_k :

$$f_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^m \psi_k^{l_k}(x_k), \quad (1.62)$$

где λ - это многомерный индекс $\lambda = \{l_k\}$. Пусть при этом функция $\psi_k^0(x_k)$ есть проекция эффективности на ось x_k , аналитическое представление которой может быть найдено обычными методами параметризации, см. например [64]. Другие ортогональные функции по переменной x_k можно найти, исходя из системы линейно независимых функций $x_k^l \psi_k^0(x_k)$ методом ортогонализации Грамма-Шмидта.

Третий метод позволяет сократить число членов разложения, если пара переменных, скажем x_1 и x_2 , является сильно коррелированной. В этом случае система ортогональных функций по этим переменным должна строиться совместно: двумерная проекция эффективности на плоскость (x_1, x_2) выбирается в качестве основной функции системы $\psi_{12}^0(x_1, x_2)$, другие функции находятся посредством ортогонализации системы линейно независимых функций $x_1^l x_2^k \psi_{12}^0(x_1, x_2)$. Естественно, этот метод может быть распространен на все непересекающиеся пары коррелированных переменных. Подробнее см. в [5].

1.5. Заключительные комментарии

Изложенная в данной главе методика обработки данных со спектрометров ГАМС-2000 и ГАМС-4000 разрабатывалась и постоянно совершенствовалась в течение более 20 лет в рамках экспериментов SERP-E-140 в ИФВЭ и NA12 в ЦЕРН. Несомненно, она представляла и представляет интерес для обработки данных с годоскопических детекторов типа ГАМС, которые были созданы вслед за указанными выше спектрометрами во многих лабораториях, включая ИФВЭ, ЦЕРН, FNAL и GSI, см. например [38, 39, 40, 42, 65, 66, 67], где стали базовыми детекторами большинства универсальных установок. Соответственно, и методика обработки данных со спектрометров ГАМС-2000 и ГАМС-4000 также была в известной мере адаптирована применительно к условиям этих экспериментов. Например, итерационная процедура калибровки ГАМС-2000, основанная на выравнивании энерговыделения в кластерах калибровочных событий, уравнение (1.10), была модифицирована в экспериментах ГИПЕРОН-М (ИФВЭ) и ALICE (ЦЕРН) под выравнивание массы двухфотонных пар от распадов $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, которые регистрируются различными каналами спектрометров в физических событиях, к табличному значению массы π^0 -мезона, см. [68, 69]. Методика параметризации кумулятивной функции электромагнитных ливней, уравнения (1.19-1.23), была использована в эксперименте ALICE для параметризации функции плотности заряда на поперечной плоскости вето-детектора заряженных частиц, см. [2]. Идея параметризации эффективности регистрации событий в виде ряда Фурье была применена для коррекции энергетической и массовой шкалы в эксперименте ГИПЕРОН-М, см. [68, 70]. Примеры можно продолжить. Но здесь важно отметить, что наработанная методика в том или ином виде вошла в практику современных экспериментов в физике высоких энергий.

Глава 2. Методика парциально-волнового анализа двухмезонных систем

В данной главе рассмотрена методика проведения масс-независимого Парциально-Волнового Анализа (ПВА) двухмезонных систем на примере реакции:



При описании дифференциального сечения этой реакции мы следуем работам [71, 72], используя принятый в них формализм, а также обозначения для спиральных амплитуд и кинематических переменных.

2.1. Модель ПВА для реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$

В системе Готтфрида-Джексона дифференциальное сечение реакции (2.1) для экспериментов на неполяризованной мишени с недектируемыми поляризациями нуклонов в конечном состоянии реакции может быть представлено в виде:

$$d^4\sigma/dt dM d\cos\theta d\phi = I(t, M, \cos\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_p \lambda_n} |H_{\lambda_p \lambda_n}(t, M, \cos\theta, \phi)|^2, \quad (2.2)$$

где t - квадрат переданного импульса, M - эффективная масса системы $\eta \pi^0$, θ и ϕ - углы вылета η мезона в системе Готтфрида-Джексона (т.е. θ - это угол Готтфрида-Джексона, а ϕ - угол Траймана-Янга), $H_{\lambda_p \lambda_n}$ - спиральные амплитуды, и, наконец, λ_p , λ_n - спиральности нуклонов в реакции (2.1).

Спиральные амплитуды $H_{\lambda_p \lambda_n}$ в свою очередь выражаются через парциальные амплитуды $L_{\lambda_p \lambda_n, m}^l(t, M)$ с данным угловым моментом l и спиральностью m системы $\eta \pi^0$:

$$H_{\lambda_p \lambda_n}(t, M, \cos\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} L_{\lambda_p \lambda_n, m}^l(t, M) D_{m0}^{l*}(\phi, \theta, 0), \quad (2.3)$$

где $D_{mm'}^l$ - это D -функции Вигнера, которые при целом l и $m' = 0$ выражаются через сферические функции (гармоники) $Y_l^m(\theta, \phi)$ и далее - через нормированные присоединенные функции Лежандра $P_l^m(\cos\theta)$ и экспоненту:

$$D_{m0}^{l*}(\phi, \theta, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} P_l^m(\cos\theta) e^{-im\phi}.$$

Спиральности нуклонов в амплитудах (2.3) могут принимать четыре набора значений: $\lambda_p \lambda_n = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. Однако в силу сохранения P -четности в сильных и электромагнитных взаимодействиях между спиральными амплитудами имеет место соотношение:

$$L_{\lambda\lambda',m}^l = (-1)^{\lambda+\lambda'+m} L_{-\lambda'-\lambda,-m}^l, \quad (2.4)$$

поэтому независимыми являются здесь только две амплитуды. В качестве таковых обычно выбирают амплитуды $L_{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},m}^l$ и $L_{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2},m}^l$, т.е. амплитуды, соответственно, без переворота и с переворотом спина нуклона в нуклонной вершине диаграммы реакции (2.1).

Далее, для описания обменов в t -канале реакции (2.1) удобно перейти к спиральным амплитудам с определенной P -четностью ($\xi = \pm 1$) обмена в t -канале:

$$\begin{aligned} L_{\lambda_p \lambda_n, m}^l(\xi) &= \sqrt{\frac{1}{2}} (L_{\lambda_p \lambda_n, m}^l - \xi (-1)^m L_{\lambda_p \lambda_n, -m}^l), & m \neq 0, \\ L_{\lambda_p \lambda_n, 0}^l(-1) &= L_{\lambda_p \lambda_n, 0}^l, & L_{\lambda_p \lambda_n, 0}^l(+1) \equiv 0, & m = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В дальнейшем для краткости мы будем использовать для четности обмена в t -канале упрощенные обозначения, а именно $\xi = \pm$ вместо соответствующих полных значений $\xi = \pm 1$. В результате спиральные амплитуды (2.5) будут записываться в виде $L_{\lambda_p \lambda_n, m}^l(\pm)$, принятом в большинстве работ по парциально-волновому анализу, см. например [71, 72, 73].

2.2. Проблема неоднозначности решений ПВА

Без потери общности процедуру масс-независимого парциально-волнового анализа квазидвухчастичных реакций можно разбить на две стадии. На

первой стадии зарегистрированные в эксперименте события используются, чтобы получить оценки моментов t_λ сферических гармоник углового распределения событий изучаемой реакции $I(t, M, \Omega)$, см. (2.2):

$$I(t, M, \Omega) = \sum_\lambda n_\lambda t_\lambda(t, M) Y_\lambda(\Omega), \quad (2.6)$$

где здесь и далее:

$$Y_\lambda(\Omega) \equiv \text{Re } Y_l^m(\Omega), \quad (2.7)$$

$\lambda \equiv lm$ - двойной индекс сферических функций $Y_l^m(\Omega)$, а n_λ - нормировка функций $Y_\lambda(\Omega)$:

$$\begin{aligned} n_\lambda &= 1, & m &= 0, \\ n_\lambda &= 2, & m &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

подробнее см. [72].

На второй стадии парциальные амплитуды реакции вычисляются на основе системы уравнений, см. например [72], которые выражают моменты t_λ ¹ через указанные выше амплитуды (2.3):

$$t_\lambda = \int d\Omega Y_\lambda(\Omega) I(t, M, \cos \theta, \phi) = \frac{1}{2} \int d\Omega Y_\lambda(\Omega) \sum_{\lambda_p \lambda_n} |H_{\lambda_p \lambda_n}(t, M, \Omega)|^2, \quad (2.9)$$

где $\Omega \equiv \{\theta, \phi\}$. Эта стадия является весьма важной для дальнейшей физической интерпретации результатов анализа, поскольку процедура нахождения амплитуд реакции по моментам t_λ углового распределения не является однозначной в силу множественности решений указанной системы уравнений. Общее решение возникающей при этом проблемы неоднозначностей ПВА хорошо известно [74, 75]. Вместе с тем в рамках общей методики частные случаи требуют конкретного детального рассмотрения.

¹Формально моменты t_λ и парциальные амплитуды $L_{\lambda_p \lambda_n, m}^l$ зависят в соответствии с уравнением (2.3) от массы M и квадрата переданного импульса t . Однако в дальнейшем мы будем проводить ПВА для ансамблей событий в достаточно узких интервалах по массе M , где зависимостью от массы можно пренебречь, а по t , как правило, будем проводить интегрирование в некоем конечном интервале. При этом интеграл по t в каждом интервале по массе M равен произведению значения функции (например, момента t_λ) в некоторой точке t_M внутри выбранного t -интервала на ширину этого интервала. Принимая далее во внимание, что функциональная зависимость амплитуд по t от массы часто достаточно слабая, то эти интегралы по t равны произведению соответствующих амплитуд в точке t_M внутри интервала интегрирования на ширину указанного t -интервала, причем вариация t_M от M будет также достаточно слабой. Поэтому в дальнейшем, как правило, мы будем опускать явную зависимость моментов и амплитуд от этих величин, полагая приближенно, что все моменты и амплитуды вычисляются при центральном значении массы M внутри данного массового интервала и одном значении $t = t_M$ вне зависимости от массы M .

Ниже мы рассмотрим решение проблемы неоднозначностей ПВА на примере реакции (2.1) в области масс $M_{\eta\pi^0}$ сравнительно недалеко от порога рождения системы $\eta\pi^0$, где ожидается заметный вклад только от S -, P - и D - волн с проекцией углового момента на третью ось $|\mu| \leq 1$. Этот случай как раз имеет место в работах [76, 77], где ПВА реакции (2.1) был проведен при импульсе 100 ГэВ/с, и оказалось, что моменты угловых распределений в системе Готтфрида-Джексона t_λ с $l > 4$, $|m| > 2$ (и следовательно, парциальные амплитуды с $L > 2$ и $|\mu| > 1$) сравнимы с нулем в пределах ошибок измерений. В этом случае система уравнений (2.9) приобретает вид:

$$\begin{aligned}
N\sqrt{4\pi} t_{00} &= |S|^2 + |P_o|^2 + |P_-|^2 + |P_+|^2 + |D_o|^2 + |D_-|^2 + |D_+|^2 \\
N\sqrt{4\pi} t_{10} &= 2 S_0 P_0 + 1.789 P_0 D_0 + 1.549 (P_- D_- + P_+ D_+) \\
N\sqrt{4\pi} t_{11} &= 1.414 S_0 P_- + 1.095 P_0 D_- - 0.632 P_- D_0 \\
N\sqrt{4\pi} t_{20} &= 2 S_0 D_0 + 0.894 |P_0|^2 - 0.447 (|P_-|^2 + |P_+|^2) + \\
&\quad + 0.639 |D_0|^2 + 0.319 (|D_-|^2 + |D_+|^2) \\
N\sqrt{4\pi} t_{21} &= 1.414 S_0 D_- + 1.095 P_0 P_- + 0.452 D_0 D_- \\
N\sqrt{4\pi} t_{22} &= 0.548 (|P_-|^2 - |P_+|^2) + 0.391 (|D_-|^2 - |D_+|^2) \\
N\sqrt{4\pi} t_{30} &= 1.757 P_0 D_0 - 1.014 (P_- D_- + P_+ D_+) \\
N\sqrt{4\pi} t_{31} &= 1.171 P_0 D_- + 1.014 P_- D_0 \\
N\sqrt{4\pi} t_{32} &= 0.926 (P_- D_- - P_+ D_+) \\
N\sqrt{4\pi} t_{40} &= 0.857 |D_o|^2 - 0.571 (|D_-|^2 + |D_+|^2) \\
N\sqrt{4\pi} t_{41} &= 1.107 D_o D_- \\
N\sqrt{4\pi} t_{42} &= 0.452 (|D_-|^2 - |D_+|^2)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

см. [72]. Введение в анализ высших волн не влияет на математическую формулировку и решение проблемы неоднозначностей. В этом случае возрастет лишь число решений, и процедура нахождения всех решений становится более трудоемкой, поскольку требует численного решения соответствующих уравнений.

2.2.1. Решение проблемы неоднозначности

Угловое распределение реакции (2.1) в системе Готтфрида-Джексона в терминах спиральных амплитуд с ненатуральной, H_- , и натуральной, H_+ , спин-четностью обмена в t -канале

$$I(\Omega) = |H_-(\Omega)|^2 + |H_+(\Omega)|^2 \quad (2.11)$$

может быть записано в следующей форме [9]:

$$4\pi \cdot I(\Omega) = |h_0(z) + h_-(z) \cos\phi|^2 + |h_+(z) \sin\phi|^2, \quad (2.12)$$

где при наличии только S -, P - и D -волн с $|\mu| \leq 1$

$$\begin{aligned} h_0(z) &= S + \sqrt{3} \cdot P_o \cdot P_1^0(z) + \sqrt{5} \cdot D_o \cdot P_2^0(z), \\ h_-(z) &= \sqrt{3} \cdot P_- \cdot P_1^1(z) + \sqrt{5/3} \cdot D_- \cdot P_2^1(z), \\ h_+(z) &= \sqrt{3} \cdot P_+ \cdot P_1^1(z) + \sqrt{5/3} \cdot D_+ \cdot P_2^1(z). \end{aligned} \quad (2.13)$$

S , $P_{o,\pm}$, $D_{o,\pm}$ есть комплексные парциальные амплитуды (см. обозначения в [72]), $P_l^m(z)$ - присоединенные функции Лежандра, $z = \cos\theta$, θ - полярный угол вылета η -мезона в системе Готтфрида-Джексона. Зависимость углового распределения (2.11) от азимутального угла (угла Траймана-Янга) полностью характеризуется тремя моментами по $\cos(m\phi)$:

$$\langle \cos(m\phi) \rangle = \int_0^{2\pi} I(\Omega) \cos(m\phi) d\phi \quad (2.14)$$

($m = 0, 1, 2$, $\langle \cos(0\phi) \rangle \equiv \langle 1 \rangle$). Совместно с (2.13) это позволяет получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 2 \langle 1 \rangle + 4 \langle \cos(2\phi) \rangle &= |h_0(z)|^2 + |h_-(z)|^2, \\ 4 \langle \cos(\phi) \rangle &= h_0(z)h_-(z)^* + h_0(z)^*h_-(z), \\ 8 \langle \cos(2\phi) \rangle &= |h_-(z)|^2 - |h_+(z)|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что в первые два уравнения входят амплитуды исключительно с ненатуральной спин-четностью обмена в t -канале. Следуя далее работе A.Gersten [75], выразим их в терминах функции $G(u)$:

$$4 \langle 1 \rangle + 8 \langle \cos(2\phi) \rangle = |G(u)|^2 + |G(-u)|^2 \quad (2.16)$$

$$8 \langle \cos(\phi) \rangle = |G(u)|^2 - |G(-u)|^2, \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} G(u) &= h_o(u) + h_-(u) \\ G(-u) &= h_o(u) - h_-(u), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$u = tg(\theta/2)$ и $z = (1 - u^2)/(1 + u^2)$. Здесь надо отметить, что область определения $G(u)$ -функции (2.18) в два раза шире, чем область определения моментов (2.16) и (2.17). Введенная $G(u)$ -функция, фактически, представляет собой отношение полиномов степени $2L$ от переменной u :

$$G(u) = P_{2L}(u)/(1 + u^2)^L. \quad (2.19)$$

В случае ПВА с учетом S -, P - и D - волн $L = 2$, и $P_{2L}(u)$ в (2.19) есть полином четвертой степени, который может быть выражен через свои корни u_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Соответственно, $G(u)$ -функция тогда может быть записана в виде:

$$G(u) = C \prod_{i=1}^4 (u - u_i)/(1 + u^2)^2, \quad (2.20)$$

где C - некоторая комплексная константа. Уравнение (2.20), по существу, решает проблему неоднозначностей ПВА [75]. Оно позволяет найти все наборы парциальных амплитуд (в нашем случае S , $P_{o,\pm}$, $D_{o,\pm}$), которые приводят в точности к одному и тому же угловому распределению событий в реакции (2.1), см. [9].

Действительно, если мы знаем один набор амплитуд, который описывает угловое распределение событий реакции, т.е. одно решение, то мы можем найти, используя уравнения (2.13) и (2.18), явный вид $G(u)$ -функции в виде (2.19) и определить 4 корня полинома в ее числителе. Далее мы легко можем найти 15 других $G(u)$ -функций (2.20) последовательным комплексным сопряжением четырех корней полинома в ее числителе. Всего в результате будет получено 2^4 $G(u)$ -функций. Все найденные таким образом $G(u)$ -функции имеют равные модули и, соответственно, приводят к идентичным комбинациям (2.16) и (2.17) моментов $\langle \cos(m\phi) \rangle$.

Для каждой из полученных $G(u)$ -функций вычисляются соответствующие $h_o(z)$ и $h_-(z)$ функции, равно как и величины S , $P_{o,-}$ и $D_{o,-}$ амплитуд, используя уравнения (2.18) и (2.13). На последнем этапе при помощи третьего уравнения в системе (2.15) и полученных ранее функций $h_-(z)$ и $\langle \cos(2\phi) \rangle$ от z вычисляется функция $|h_+(z)|^2$ (функциональная зависимость момента $\langle \cos(2\phi) \rangle$ от z определена начальным решением).

Соответствующие каждому решению в секторе амплитуд с ненатуральной спин-четностью величины P_+ и D_+ амплитуд могут быть получены на основе функции $|h_+(z)|^2$, см. третье уравнение системы (2.13). Благодаря линейности последнего уравнения относительно z (общий множитель $(1-z^2)^{1/2}$ может быть опущен в обеих частях уравнения), этот шаг не приводит к дополнительной неоднозначности ПВА в секторе амплитуд с натуральной спин-четностью в рассматриваемом случае $L = 2$. В результате мы получаем $2^{2L} = 16$ решений, каждое из которых дает идентичное с начальным угловое распределение (2.13) в реакции (2.1). Обобщение изложенной процедуры нахождения нетривиальных решений для случая произвольного L не представляет труда.

Из 16 найденных наборов амплитуд восемь наборов могут быть получены из восьми других комплексным сопряжением всех парциальных амплитуд (тривиальная неоднозначность). Таким образом, в ПВА реакции (2.1) с учетом S -, $P_{o,\pm}$ - и $D_{o,\pm}$ -волн существует 8 различных нетривиальных решений. Этот результат о числе нетривиальных решений в реакции (2.1) согласуется с полученным ранее в работе [78] при проведении ПВА реакции $\pi^+ n \rightarrow K^+ K^- p$, которая с точки зрения математической формулировки проблемы неоднозначности близка к реакции (2.1).

Дальнейшее развитие затронутых здесь вопросов можно найти в работах S.U.Chung [73], после которых предмет, в известной мере, можно считать исчерпанным.

Поиск всех нетривиальных решений ПВА в заданном интервале по массе системы $\eta\pi^0$ был реализован в виде процедуры, на вход которой подавался

набор амплитуд и фаз одного случайно найденного решения, полученного в результате фита углового распределения событий в данном интервале масс $\eta\pi^0$ систем в терминах амплитуд и фаз в соответствии с системой уравнений (2.10). На выходе процедура возвращала все нетривиальные решения ПВА в терминах амплитуд и фаз, а также (комплексные) корни функции Герстена, см. уравнение (2.20).

2.2.2. Сшивка решений ПВА

Рассмотренная выше процедура нахождения нетривиальных решений при проведении масс-независимого ПВА реакции (2.1) решает проблему неоднозначностей в каждом интервале по массе системы $\eta\pi^0$. Следующий важный вопрос - это как связать (сшить) решения, независимо найденные в соседних массовых интервалах. Известно несколько процедур сшивки решений ПВА, см. например, [74]. Суть их состоит в том, что в соседних массовых интервалах решения должны удовлетворять некому условию гладкости.

Наиболее эффективной процедурой с нашей точки зрения является процедура, основанная на требовании гладкости корней функции Герстена в соседних интервалах (бинах) по массе анализируемой системы. Условие гладкости при переходе от массового бина $n - 1$ к бину n количественно формулируется в виде требования минимума функционала Φ_n на множестве всех возможных перестановок корней функции Герстена $\{\lambda_k^n\}$ в бине n по отношению к таковым в бине $n - 1$:

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{2L} (a_k^{n-1} - a_{\lambda_k^n}^n)^2 + \sum_{k=1}^{2L} (a_k^{n-2} - 2a_k^{n-1} + a_{\lambda_k^n}^n)^2, \quad (2.21)$$

где $a_k^i = \text{Re } u_k^i$ при $1 \leq k \leq L$ и $a_k^i = \text{Im } u_k^i$ при $L + 1 \leq k \leq 2L$ - это действительные и мнимые части корней функции Герстена в массовом бине i соответственно. Число перестановок $\{\lambda_k^n\}$ в каждом бине равно $L!$ При этом первое слагаемое в (2.21) есть условие гладкости корней Герстена как функций массы системы $\eta\pi^0$, а второе - первой производной этих функций.

Отметим, что при сшивке первых двух бинов второе слагаемое не используется.

Более аккуратное условие гладкости (2.21) можно получить, если учесть ошибки определения корней Герстена Δa_k^i в реальном эксперименте. В этом случае функционал записывается в виде

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{2L} \frac{(a_k^{n-1} - a_{\lambda_k}^n)^2}{(\Delta a_k^{n-1})^2 + (\Delta a_{\lambda_k}^n)^2} + \sum_{k=1}^{2L} \frac{(a_k^{n-2} - 2a_k^{n-1} + a_{\lambda_k}^n)^2}{(\Delta a_k^{n-2})^2 + 4(\Delta a_k^{n-1})^2 + (\Delta a_{\lambda_k}^n)^2}. \quad (2.22)$$

Среднеквадратичные ошибки корней определялись методом Монте-Карло: амплитуды и фазы реакции генерились независимо по Гауссу с использованием значений и их ошибок, полученных в результате фита угловых распределений, далее определялись корни Герстена и их ошибки как среднеквадратичные отклонения полученных в результате распределений корней Герстена, подробнее см. в [11].

2.2.3. Моделирование неоднозначностей методом Монте-Карло

Выше было показано, что количество нетривиальных решений, возникающих в парциально-волновом анализе реакции (2.1) при учете S -, P - и D -волн с $|m| \leq 1$, равно восьми. Столь высокий уровень неоднозначности, вообще говоря, не является очевидным. Он связан с наличием P_- - и D_- -амплитуд, вклад которых в сечение обусловлен b -обменом в t -канале процесса (2.1). Существование восьми математически эквивалентных решений, приводящих к тождественно совпадающим угловым распределениям реакции, также значительно затрудняет идентификацию единственного физического решения. Кроме того, задача усложняется конечной точностью измерения амплитуд, связанной с ограниченной статистической обеспеченностью эксперимента, и погрешностями в определении эффективности регистрации событий реакции.

В этой связи методом Монте-Карло (МК) было проведено модельное изучение вариаций амплитуд реакции (2.1) и устойчивости получаемых нетривиальных решений в условиях эксперимента в зависимости от статистической обеспеченности (мощности) МК-выборки, моделирующей данные экс-

перимента. Было проанализировано несколько наборов амплитуд с разными соотношениями их модулей: $|S| : |P_o| : |P_-| : |P_+| : |D_o| : |D_-| : |D_+| = 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1$, $1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 2.5$ и $1 : 1 : 0.5 : 1 : 1 : 0.5 : 3$. Фазы амплитуд с неестественной четностью были фиксированы относительно фазы D_o -волны: $\varphi_S, \varphi_{P_o}, \varphi_{P_-}, \varphi_{D_-} = 0.6, 1.2, 1.8, 2.4$; сдвиг фаз D_+ - и P_+ - амплитуд был выбран равным 0.6, см. работу [12].

В рассматриваемом случае распределение событий реакции (2.1) по углам в системе Готтфрида-Джексона, $I(\Omega)$, однозначно определяется двенадцатью моментами t_{lm} ($l \leq 4, m \leq 2$) сферических гармоник $ReY_{lm}(\Omega)$, см. (2.6). Моменты t_{lm} в свою очередь выражаются через указанные выше модули амплитуд и их фазы согласно уравнениям (2.10).

Процедура МК-анализа последовательно включала в себя:

- генерацию ансамбля МК-событий, распределенных по углам Ω в системе Готтфрида-Джексона в соответствии с заданным набором амплитуд;
- восстановление значений амплитуд (решение I) и их погрешностей методом максимума правдоподобия на основе указанного ансамбля событий; фитирование проводилось по-событийно с использованием программы MINUIT [79], а в качестве начальных величин брались значения амплитуд, заданные при МК-генерации ансамбля событий, подробнее см. в [12];
- вычисление моментов t_{lm} сферических гармоник углового распределения (2.6), соответствующих найденным значениям амплитуд;
- реконструкцию наборов амплитуд семи других решений на основе этих моментов, вычисление значений функции правдоподобия, статистических ошибок модулей амплитуд и относительных фаз при помощи процедуры HESSE [79].

Для определения статистического разброса получаемых значений амплитуд, при помощи указанной процедуры были проанализированы МК-ансамбли мощностью 900, 3600 и 14400 событий; в каждом из этих случаев была проведена генерация четырех независимых наборов событий. Результаты

парциально-волнового анализа подтвердили наличие восьми нетривиальных решений и показали, что независимо от выборки Монте-Карло и соотношения амплитуд все восемь решений заведомо разделяются (значения функций правдоподобия и величины моментов t_{lm} совпадают в восьми решениях с вычислительной точностью). Это иллюстрируется Рис. 2.1, где представлены модули и фазы S -, P_o - и D_+ - амплитуд для всех восьми решений в четырех различных МК-выборках. Решение I соответствует исходному соотношению модулей амплитуд ($|S| : |P| : |D| = 1 : 1 : 1$). Представление о вариации амплитуд при переходе от одного решения к другому дает Рис. 2.2 (результаты приведены для одной выборки событий, где статистика увеличена вчетверо).

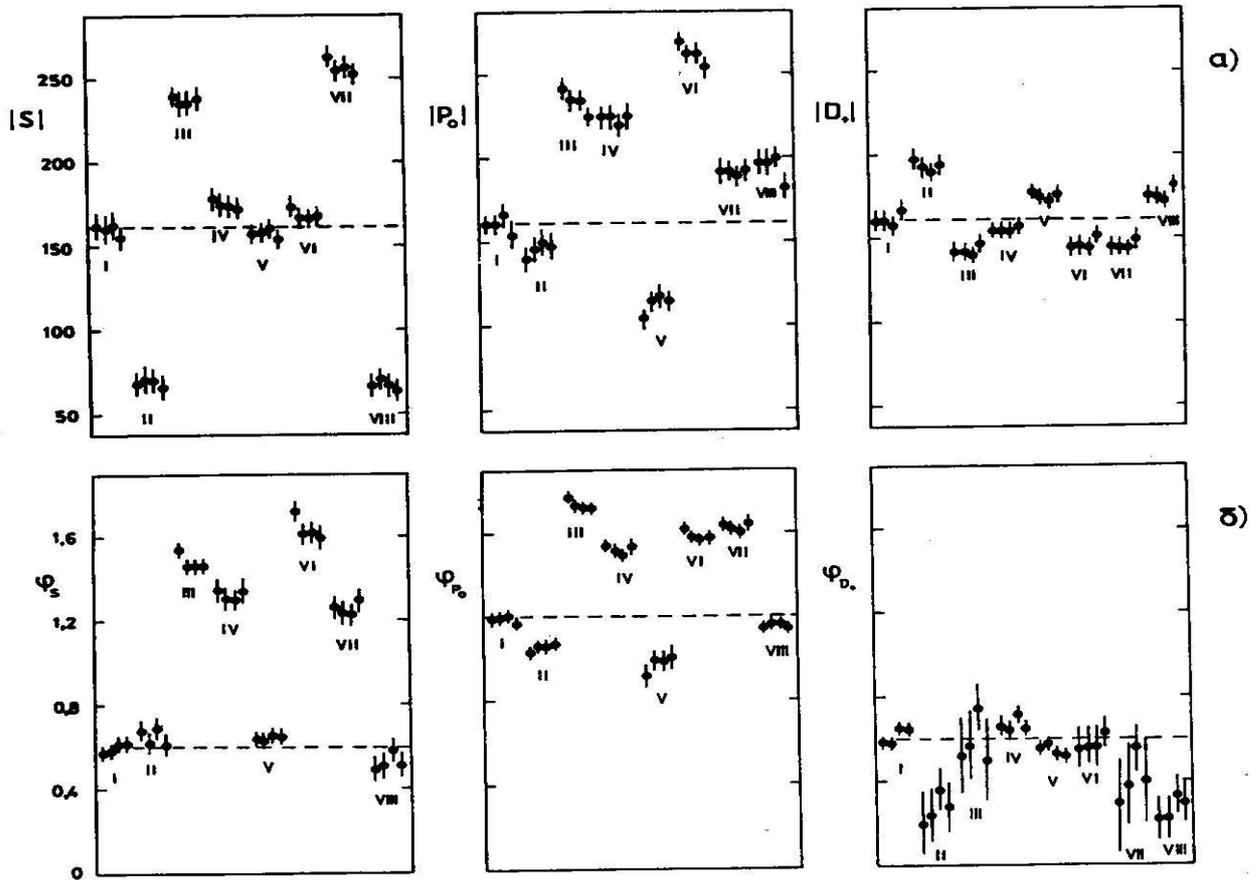


Рис. 2.1: Восемь решений парциально-волнового анализа реакции (2.1) для четырех различных выборок мощностью 14400 событий каждая: а) модули амплитуд S -, P_o - и D_+ - волн, б) их фазы. Начальные значения параметров показаны пунктиром. Номера решений показаны римскими цифрами.

Следует отметить, что значительным вариациям при переходе от од-

ного решения к другому в большей мере подвержены амплитуды S - и P -волн, нежели амплитуды D -волн. Для случая $|S| : |P| : |D| = 1 : 1 : 1$ это видно на Рис. 2.2. То же наблюдается и для других начальных соотношений амплитуд, рассмотренных в работе. Указанное обстоятельство обусловлено тем, что вариации D -амплитуд существенно ограничены связями, накладываемыми моментами высших гармоник t_{40} , t_{41} и t_{42} , которые определяются однозначно, см. (2.10).

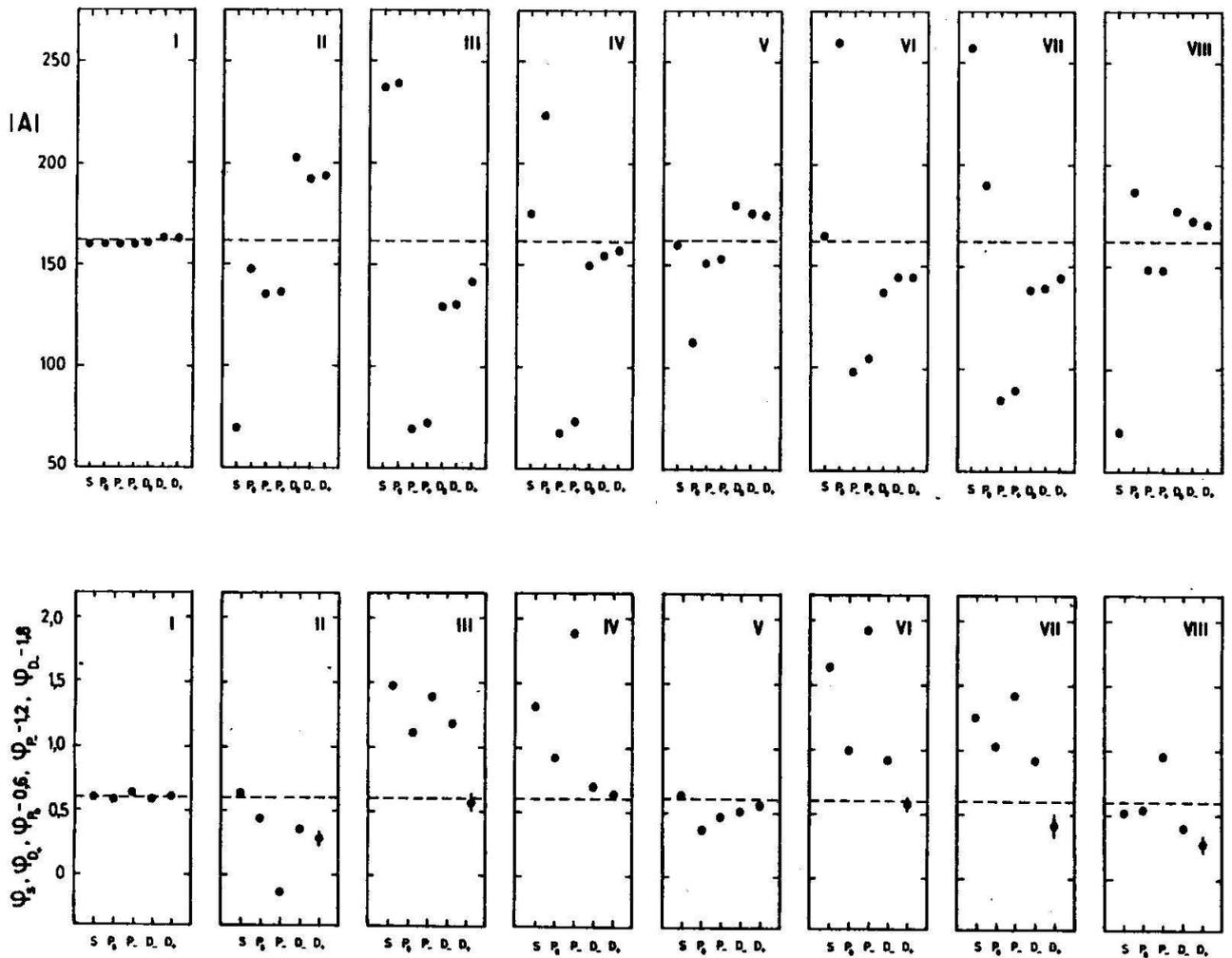


Рис. 2.2: Восемь решений парциально-волнового анализа реакции (2.1) для выборки мощностью 57600 событий: вверху – модули амплитуд, внизу – их фазы. Статистические ошибки, кроме тех случаев, где они приведены, не превышают размеров точек. Начальные значения фаз и модулей амплитуд показаны пунктиром, номера решений показаны римскими цифрами.

Наконец обратимся к проблеме устойчивости результатов парциально-волнового анализа. При уменьшении числа событий в выборке устойчивость

сохраняется до определенного предела. Если статистику уменьшить с 14400 до 3600 событий, то результаты качественно согласуются с изложенными выше. Однако, если статистику уменьшить еще вчетверо, вариации амплитуд при переходе от одного решения к другому часто оказываются сравнимыми с вариациями перехода от одной МК-выборки к другой; особенно это касается случая, когда доминирует D_+ -волна. Это показывает, что последовательный парциально-волновой анализ событий, учитывающий S -, P - и D - волны при статистике выборки $\leq 10^3$ событий в одном бине по массе системы, практически, не реализуем.

2.3. Исследование точности ПВА методом Монте-Карло

В настоящем подразделе, следуя работе [15], проведено количественное исследование точности нескольких схем масс-независимого ПВА методом Монте-Карло (МК) на примере реакции (2.1) с целью выявления возможных систематических погрешностей.

Указанная реакция с этой целью была выбрана не случайно. Во-первых, ПВА реакции (2.1) и связанные с ним вопросы представляют самостоятельный интерес в связи с результатами работ [76, 77]. Во-вторых, математические основы ПВА реакции (2.1) просты [72], причем проблема неоднозначностей разрешима на элементарном уровне [9, 12]. Это позволяет выделить и интерпретировать эффекты, приносимые в результаты самой процедурой анализа, а также получить рекомендации для проведения ПВА в более сложных случаях.

При проведении ПВА на начальном этапе необходимо определить эффективность регистрации событий реакции в данном эксперименте. С целью максимального приближения к условиям реального эксперимента [76, 77] для нахождения эффективности была использована реальная геометрия установки ГАМС-4000 при импульсе 100 ГэВ/с (эксперимент NA12), учитывались также применявшиеся в [76, 77] критерии отбора событий реакции (2.1). Мас-

са $\eta\pi^0$ -системы была фиксирована равной 1320 МэВ (массе $a_2(1320)$ -мезона), т.е. фактически мы рассматриваем здесь ПВА в одном бине по массе $\eta\pi^0$ -системы.

Эффективность как функция углов $\eta\pi^0$ -распада в системе Готтфрида-Джексона реакции (2.1) вычислялась методом Монте-Карло и параметризовалась в виде ряда сферических функций $Y_\lambda(\Omega)$:

$$\varepsilon(\Omega) = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} \cdot Y_{\lambda}(\Omega) \quad (2.23)$$

($\Omega \equiv \cos \theta_{GJ}, \phi_{TY}$). Она практически равномерна по азимутальному углу ϕ_{TY} , но сильно зависит от $\cos \theta_{GJ}$, зануляясь вблизи $\cos \theta_{GJ} = -1$, Рис. 2.3, см. также Рис. 1.8.

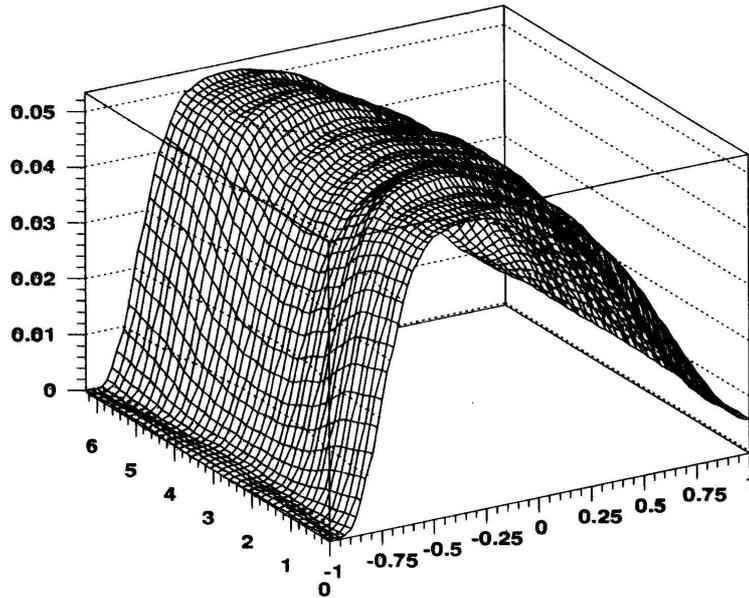


Рис. 2.3: Зависимость эффективности регистрации событий реакции (2.1) при импульсе 100 ГэВ/с в системе Готтфрида-Джексона от углов $\cos \theta_{GJ}$ и ϕ_{TY} в эксперименте NA12 [18, 76] при $M_{\eta\pi^0} = 1.32$ ГэВ, $\varepsilon_{min} = 0.008$.

Наличие области нулевой эффективности требует особо тщательного анализа событий в окрестности этой области. Даже при высокой статистической обеспеченности эксперимента число таких событий сильно флуктуирует, и при использовании приближенных методов ПВА здесь могут возникнуть значительные систематические погрешности [61]. Для контроля за этими эф-

фактами мы ввели предварительный отбор событий по их эффективности регистрации ε_i : события с $\varepsilon(\Omega_i) < \varepsilon_{th}$ исключались из последующего анализа. И далее проверялась устойчивость результатов ПВА при вариации параметра ε_{th} .

Следующим этапом в ПВА обычно является разложение исходного углового распределения событий $I(\Omega)$ в ряд по сферическим функциям (2.6). При обработке данных реальных экспериментов на этом этапе используется несколько математически различных процедур, см. например, [61, 81, 82, 83]. Ниже мы остановимся на трех из них, на наш взгляд, наиболее характерных.

В основе первого типа процедур лежит математически строгий метод максимума правдоподобия [61], в соответствии с которым моменты сферических функций t_λ определяются путем минимизации функционала:

$$F_{ML} = - \sum_{i=1}^N \ln\{I(\Omega_i)\varepsilon(\Omega_i)\}. \quad (2.24)$$

Плотность распределения зарегистрированных событий должна быть при этом нормирована, например, на полное число событий N , используемых для анализа:

$$\int I(\Omega)\varepsilon(\Omega)d\Omega = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}t_{\lambda} = N. \quad (2.25)$$

Особенно элегантную форму функционал (2.24) принимает в предположении пуассоновского распределения событий N со средним $\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}t_{\lambda}$ в каждом бине по массе $\eta\pi^0$ системы. В этом случае функционал записывается в виде:

$$F_{ML} = - \sum_{i=1}^N \ln\{I(\Omega_i)\} + \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}t_{\lambda}, \quad (2.26)$$

детали см. в [61].

Второй тип процедур использует математически приближенные методы. Мы рассмотрим здесь метод [82], который далее будем называть методом Грайера. Суть его состоит в модификации функционала (2.24) путем введения веса w_i событий:

$$F_{Gr} = - \sum_{i=1}^N w_i \ln\{I(\Omega_i)\varepsilon(\Omega_i)\}. \quad (2.27)$$

Нормировка (2.25) при этом сохраняется, а вариации веса w_i предполагаются ограниченными (в оригинальной работе [82] они не превышали 40% от среднего). Метод Грайера применялся, в частности, при обработке данных эксперимента NA12 в работах [76, 77], где в качестве веса w_i использовалась величина, обратная эффективности, $1/\varepsilon(\Omega_i)$. Такая модификация метода хорошо известна, см. например [61], где подробно изложены математические основы этого метода и указаны причины, ограничивающие область его применимости.

Наконец, третий тип процедур использует методы линейной алгебры [81, 82]. Асимптотически, при увеличении числа измеренных событий и соответствующем повышении точности определения эффективности, этот метод является точным. Основное преимущество применения такого подхода в реальных экспериментах состоит в скорости вычислений. Наглядность и особое упрощение алгоритмов достигаются, если всюду $\varepsilon(\Omega) > 0$. В этом случае оценки моментов сферических гармоник даются уравнениями

$$\tilde{t}_\lambda = \sum_{i=1}^N Y_\lambda(\Omega_i)/\varepsilon(\Omega_i). \quad (2.28)$$

Моменты t_λ вычислялись, подробнее см. в [15], каждым из перечисленных выше методом. МК-моделирование "регистрируемых" $\eta\pi^0$ -событий было проведено с учетом эффективности установки, см. Рис. 2.3, для двух исходных D -волновых состояний $\eta\pi^0$ -системы в реакции (2.1): D_0 и D_+ . События с эффективностью регистрации $\varepsilon(\Omega_i) < \varepsilon_{th}$ отбрасывались.

В каждом случае разыгрывалось восемь независимых ансамблей МК-событий с тем, чтобы определить статистические погрешности моментов и проверить устойчивость результатов фита. Мощность ансамблей "зарегистрированных" МК-событий была выбрана такой же, как и в реальном эксперименте [76, 77]: 2300 $\eta\pi^0$ -событий в 4γ -моду в 35-МэВ бине по массе системы в максимуму $a_2(1320)$ -пики.

Примеры угловых распределений МК-событий представлены на Рис. 2.4. Здесь же приведены распределения взвешенных событий с весом $1/\varepsilon(\Omega_i)$.

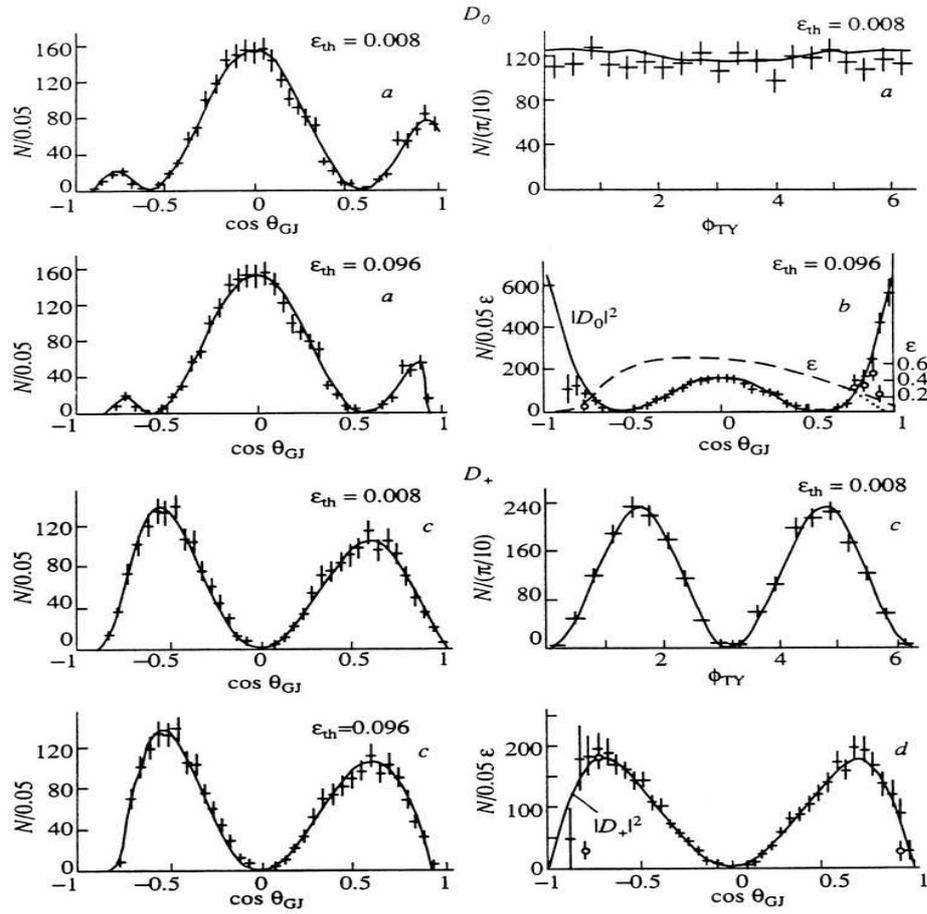


Рис. 2.4: Результат фита угловых МК распределений "зарегистрированных" событий методом максимума правдоподобия (сплошные кривые) для изначальных D_0 (верхние четыре рисунка) и D_+ (нижние четыре рисунка) волн. На рисунках b и d показаны угловые распределения взвешенных событий с весом $1/\varepsilon(\Omega_i)$ при $\varepsilon_{th} = 0.008$ (+) и 0.096 (o). Другие детали см. в [15].

Как видно из Рис. 2.4 b, d , в тех случаях, когда эффективность строго положительна в некоторой области $\cos \theta_{GJ}$, либо когда вместе с ее занулением зануляется и число исходных событий, угловые распределения взвешенных событий неплохо воспроизводят исходные распределения.

Фитирование угловых распределений указанных ансамблей МК-событий было последовательно проведено каждым из трех рассмотренных выше методов: методом максимума правдоподобия (2.24), методом Грайера (2.27) с весовым множителем $1/\varepsilon(\Omega_i)$ [76, 77] и упрощенным алгебраическим методом, см. выше. Как и в работах [76, 77] использовалась простая модель ПВА [72], учитывающая в реакции (2.1) лишь S -, P - и D -волны с $|\mu| \leq 1$. Угловое распределение событий реакции в системе Готтфрида-Джексона при этом

полностью определяется двенадцатью моментами t_λ , см. (2.10).

Как видно из Рис. 2.4, метод максимума правдоподобия обеспечивает статистически-согласованное описание угловых распределений "регистрируемых" событий реакции (2.1) для обеих исходных D -волн: D_0 и D_+ . Результат фита устойчив при переходе от одного МК-ансамбля к другому, а также к вариации параметра ε_{th} .

Разброс величин моментов t_λ , найденных при фитировании восьми различных МК-ансамблей, носит статистический характер ($\Delta t_\lambda \sim 1/\sqrt{N}$) и совпадает с теоретически определенными погрешностями. При $N \leq 100$ процедура фита начинает расходиться, и ПВА при столь малой статистике практически не реализуем. Полученные в результате методом максимума правдоподобия значения моментов находятся в хорошем согласии с ожидаемыми для чистых D_0 - и D_+ -волн - см. Рис. 2.5, где приведены отличные от нуля нормированные моменты $g_{lm} = t_{lm}/t_{00}$.

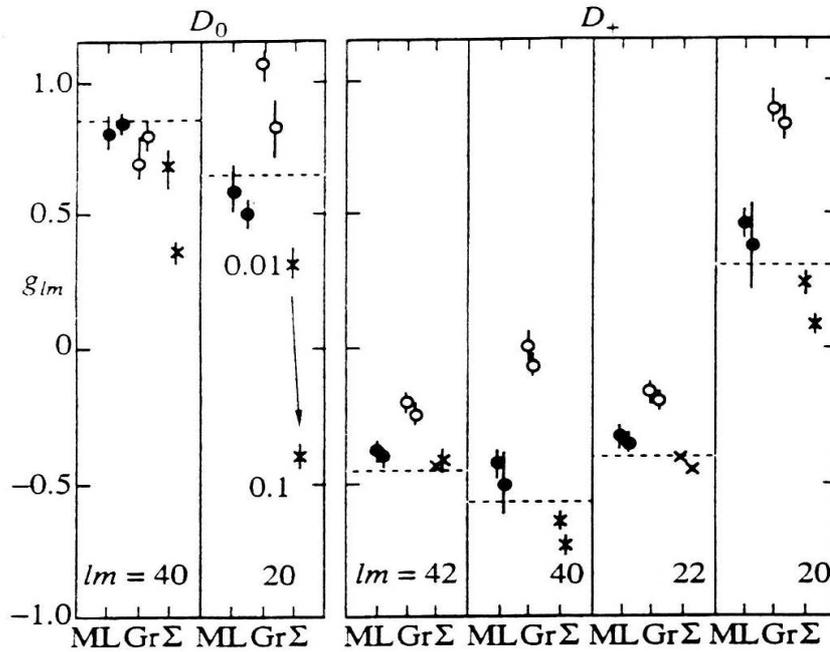


Рис. 2.5: Нормированные моменты сферических гармоник $g_{lm} = t_{lm}/t_{00}$, полученные методом максимума правдоподобия (ML, \bullet), методом Грайера (Gr, \circ) и алгебраическим методом (Σ , \times) для изначальных чистых D_0 (слева) и D_+ (справа) волн. Горизонтальные штриховые линии показывают теоретические значения ненулевых моментов для этих состояний. В каждой паре показанных на рисунке точек левая соответствует $\varepsilon_{th} = 0.008$, а правая - $\varepsilon_{th} = 0.096$.

Результаты фита угловых распределений методом максимума правдоподобия устойчивы к увеличению порога ε_{th} вплоть до ≈ 0.1 , см. Рис. 2.4 и 2.5. Дальнейшее увеличение порога приводит к отклонению ряда моментов от ожидаемых величин (Рис. 2.6 и 2.7). Особенно это заметно для момента g_{20} в случае начальной D_o -волны (Рис. 2.6). Последнее связано с искусственной генерацией S -волны, поскольку со сжатием области эффективной регистрации событий к $\cos \theta_{GJ} \approx 0$ угловые распределения, соответствующие начальным S - и D_o -волнам, становятся все менее различимыми.

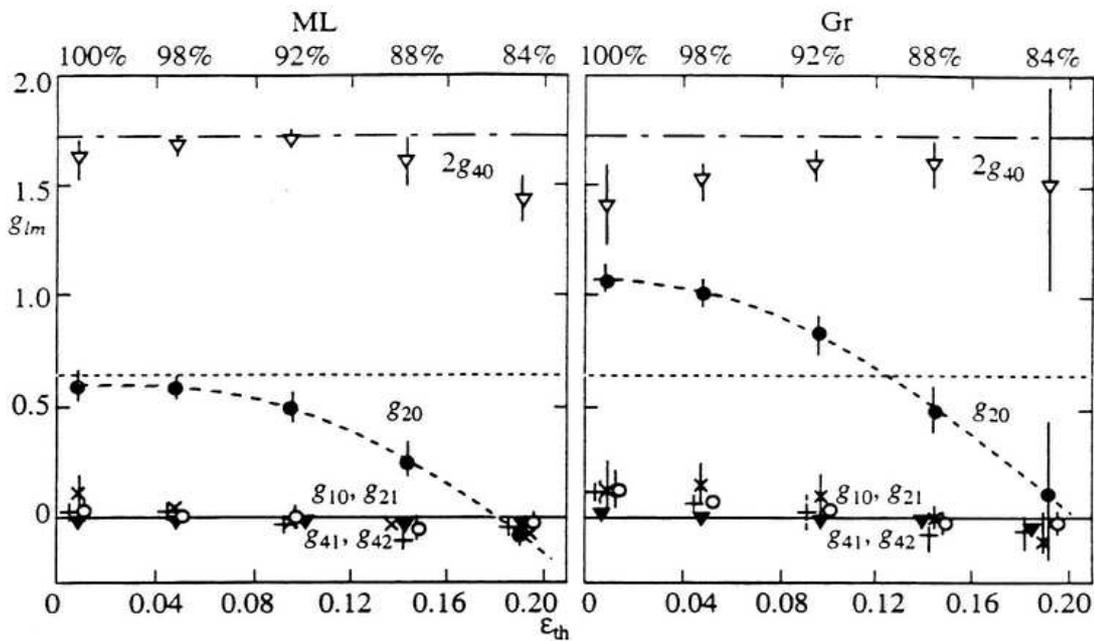


Рис. 2.6: Нормированные моменты сферических гармоник $g_{lm} = t_{lm}/t_{00}$, полученные для случая чистой D_0 -волны методом максимума правдоподобия (ML) и методом Грайера (Gr) как функции порога отбора событий по эффективности ε_{th} . Горизонтальные линии показывают теоретические значения моментов, соответствующих чистой D_0 -волне. Числа над верхними горизонтальными осями показывают процент оставшихся при таком отборе событий для анализа угловых распределений.

На Рис. 2.5 представлены также моменты, найденные упрощенным алгебраическим методом (показана значками Σ и \times). Несмотря на нарушение условий применимости метода ($\varepsilon(\Omega) = 0$ вблизи $\cos \theta_{GJ} = -1$), в случае исходной D_+ -волны и при низком пороге ε_{th} эти моменты близки к идеальным. В случае же исходной D_o -волны моменты, полученные алгебраическим методом, далеки от расчетных и резко уменьшаются с ростом ε_{th} . Столь специ-

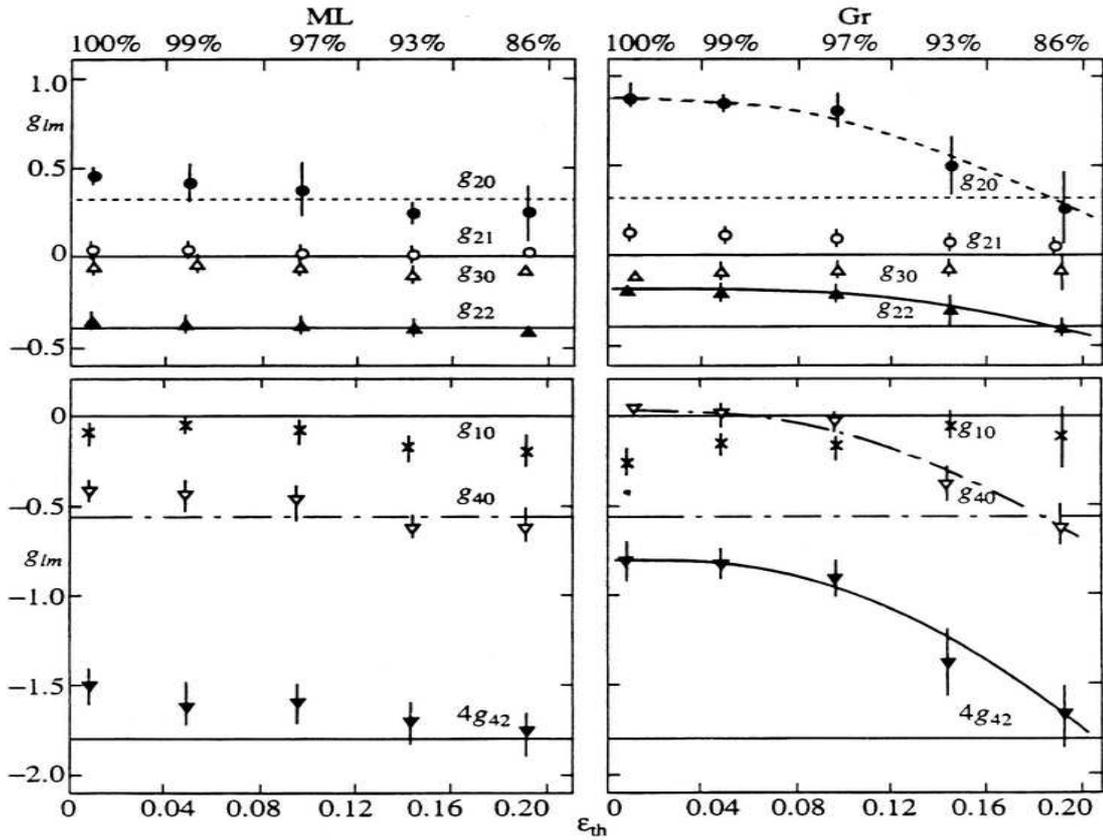


Рис. 2.7. То же, что и на Рис.2.6, но для изначальной D_+ -волны.

фическое поведение моментов \tilde{t}_{lm} позволяет уже на начальной стадии ПВА, т.е. до перехода к определению амплитуд, выяснить в условиях эксперимента [76, 77], какая из D -волн, D_o или D_+ , доминирует в реакции (2.1).

Значения нормированных моментов, полученных методом Грайера (2.27), также представлены на Рис. 2.5. Приведенные ошибки определены по статистическим флуктуациям величин g_{lm} при переходе от одного МК-ансамбля к другому. В сравнении с ними ошибки, вычисленные по процедуре работы [77], оказываются заниженными в несколько раз, подробнее см. в [8, 61].

Как видно из Рис. 2.5, определенные методом Грайера величины моментов при малых ε_{th} резко отличаются от ожидаемых. Противоречие особенно велико в случае исходной D_+ -волны. Изучение зависимости моментов от ε_{th} (Рис. 2.6, 2.7) в надежде, что в соответствии с рекомендациями [61] результаты исправятся при повышении ε_{th} , не оправдало ожиданий: области ε_{th} , где метод Грайера дает близкий к правильному результат как для исходной

D_0 -волны, так и для D_+ -волны, не существует. Отметим еще также, что при $\varepsilon_{th} > 0.1$ погрешности этого метода также резко возрастают.

Некорректность использования метода Грайера в рассмотренном случае ПВА реакции (2.1) наглядно иллюстрируется качеством фитирования угловых распределений "зарегистрированных" событий, особенно при малых ε_{th} (Рис. 2.8). С ростом ε_{th} фит хотя и улучшается, но статистически значимое согласие не достигается (ср. с Рис. 2.4).

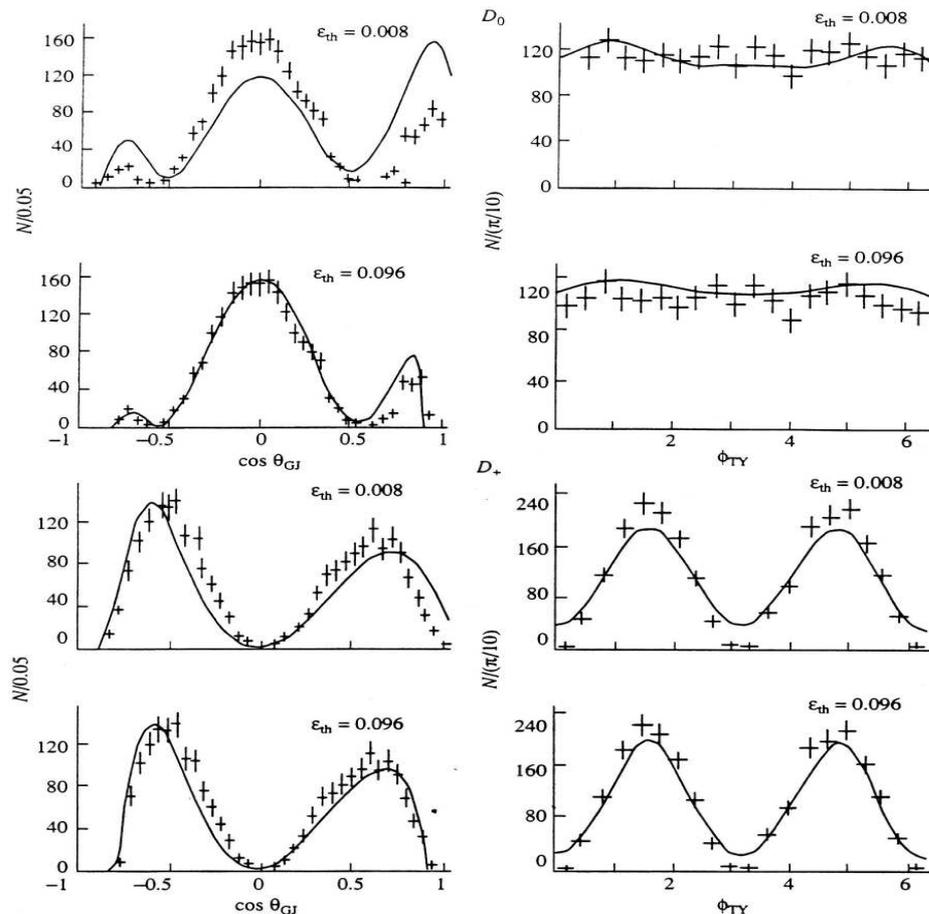


Рис. 2.8: Результат фита угловых распределений "зарегистрированных" событий методом Грайера (кривые). Величины (+) - те же, что и на Рис. 2.4.

Для определения амплитуд реакции (2.1) можно воспользоваться одним из двух способов: а) минимизировать функционал (2.24) или (2.27) с учетом уравнений связи (2.10), или б) сначала определить моменты t_λ путем минимизации функционала (2.24) или (2.27) без учета уравнений связи (2.10), а затем решить эти уравнения относительно амплитуд. Последняя задача, как правило, не допускает аналитического решения, но может быть решена

приближенными или численными методами. Так, в работе [77] амплитуды $\vec{a} \equiv (S, P_-, P_0, P_+, D_-, D_0, D_+)$ реакции (2.1) находились минимизацией функционала:

$$F_t(\vec{a}) = \sum_{lm} (\tilde{t}_{lm} - t_{lm}(\vec{a}))^2 / \sigma_{lm}^2 \quad (2.29)$$

где σ_{lm}^2 - дисперсии определения соответствующих моментов (корреляционные члены в оригинальной работе [77] были опущены); численные оценки моментов \tilde{t}_{lm} и моменты $t_{lm}(\vec{a})$ как функции амплитуд \vec{a} при этом, вообще говоря, различаются. Способ (б) использовался для ПВА методом Грайера в работе [77].

ПВА методом максимума правдоподобия мы провели с целью сравнения достигаемой при этом точности как способом (а) (ниже ML), так и способом (б). Последний мы будем обозначать ниже как ML'.

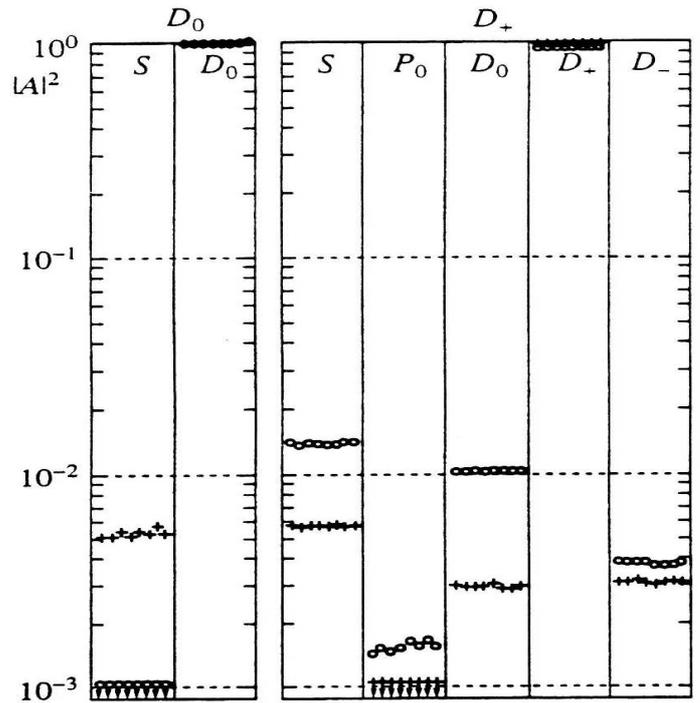


Рис. 2.9: Квадраты модулей S , P и D амплитуд, найденные методом максимума правдоподобия (8 решений, показаны вдоль оси X) для исходных D_o - и D_+ -волн (нормировка: $N\sqrt{4\pi} t_{00} = 1$), $\varepsilon_{th} = 0.008$ (+) и 0.096 (o). Волны с $|A|^2 < 0.001$ не показаны.

Восстановленные методом максимума правдоподобия (ML) квадраты модулей нормированных амплитуд всех восьми решений представлены на Рис. 2.9. В случае обеих начальных волн, D_o и D_+ , в результате ПВА наряду с доминирующей начальной волной возникают слабые ложные волны, вклад которых составляет $< 1\%$. При увеличении ε_{th} , начиная с 0.1 , интенсивность

ложной S -волны (в случае начальной D_o -волны) становится заметной, указывая тем самым на верхнюю границу ε_{th} , выше которой ПВА быстро теряет точность, подробнее см. [15].

Схема ПВА ML' , использующая две последовательные минимизации, (2.26) и (2.29), уступает в точности классической схеме ML . При малых ε_{th} здесь появляются ложные волны с интенсивностью в несколько процентов, в результате чего интенсивность доминантной волны оказывается заниженной на 5 – 15%. Это особенно заметно в случае исходной D_+ -волны. Результаты анализа менее устойчивы, чем в случае классической схемы ML , что находит свое отражение и в бóльших погрешностях амплитуд. Вместе с тем точность воспроизведения D_o - и D_+ -волн при использовании схемы ML' (по сравнению со схемой ML) вполне приемлема, см. Рис. 2.10.

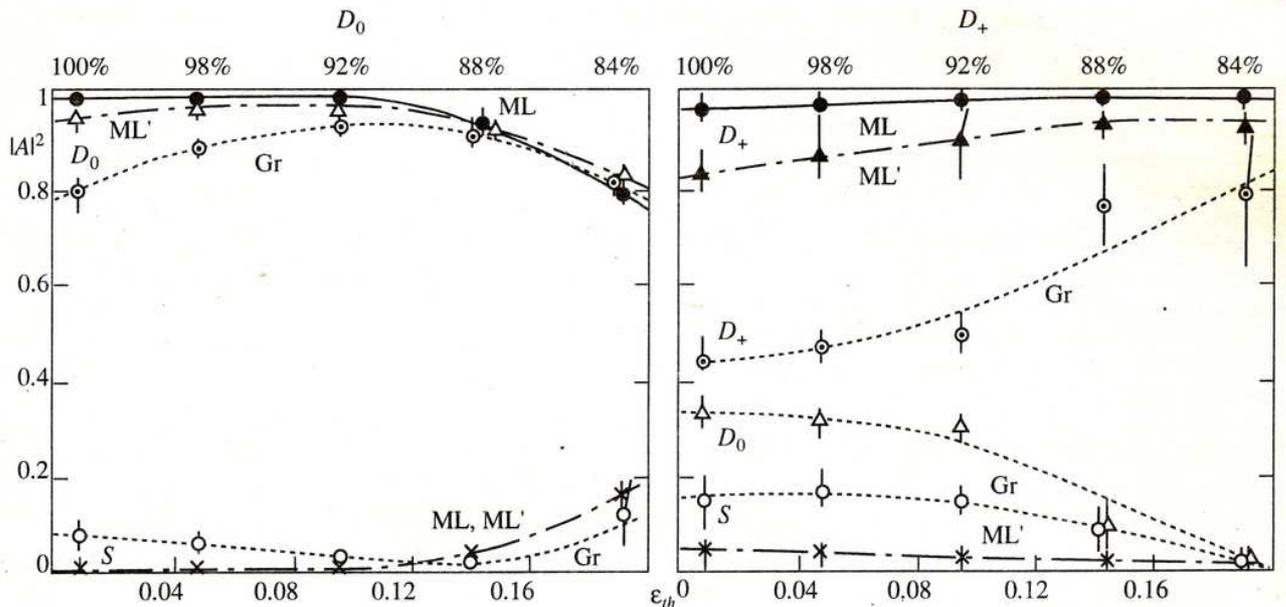


Рис. 2.10: Квадраты модулей амплитуд, полученные при различных порогах ε_{th} в результате парциально-волнового анализа методом Грайера (Gr), методом максимума правдоподобия (ML), а также методом максимума правдоподобия (ML') с минимизацией (2.29). Из восьми возможных решений представлено ближайшее к исходному (чистая D_o - или D_+ -волна). Точками показаны значения $|D_o|^2$, $|D_+|^2$ и $|S|^2$, амплитуды остальных волн в пределах погрешностей (несколько процентов) не отличаются от нуля. Кривые проведены через точки от руки.

Метод максимума правдоподобия (ML) с высокой точностью восстанавливает исходные угловые распределения как в случае начальной D_o -волны,

так и D_+ -волны. В условиях эксперимента [76] систематическая погрешность определения доминирующей амплитуды в области $a_2(1320)$ -мезона может быть консервативно оценена в несколько процентов.

Перейдем теперь к процедуре ПВА, использующей метод Грайера [76, 77, 80]. Схема ПВА, основанная на моментах t_{lm} , вычисляемых методом Грайера (2.27) с весом $w_i = 1/\varepsilon(\Omega_i)$, и дальнейшей минимизации функционала (2.29), была применена в этих работах для анализа двумерных угловых распределений событий в виде гистограмм. Ниже приведены результаты по-событийного анализа. Как показала прямая проверка, результаты практически не отличаются от анализа гистограмм, если размер бина по телесному углу выбран как в [76, 77].

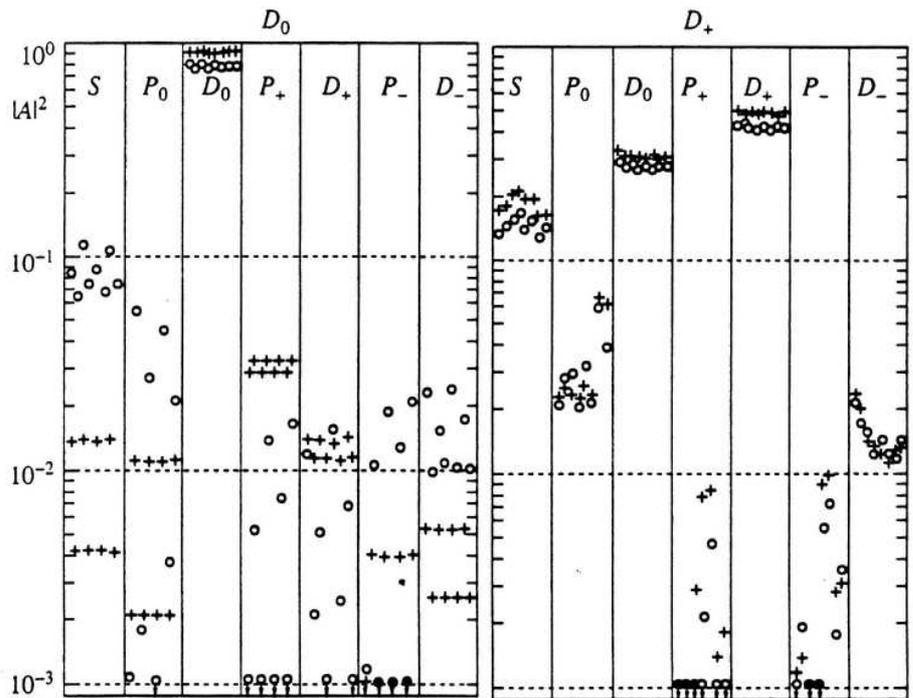


Рис. 2.11: То же, что на Рис. 2.9, но при использовании метода Грайера.

На Рис. 2.11 представлены квадраты модулей амплитуд, полученных методом Грайера при малых ε_{th} . Бросается в глаза сильная "перекачка" исходных волн в ложные волны. В случае исходной D_0 -волны 10% ее переходит в S -волну, возникает даже заметная P_0 -волна. Особо велики искажения в случае исходной D_+ -волны: интенсивность восстановленной D_+ -волны составляет всего лишь половину от исходной, на близком к ней уровне (30%) "создается" D_0 -волна и до 20% перекачивается в S -волну, возникает замет-

ная P_o -волна. При этом за счет генерации ложных волн восемь нетривиальных решений теперь в отличие от анализа методом максимума правдоподобия заметно отличаются, сравни Рис. 2.11 и 2.9. Переход в область больших ε_{th} несколько уменьшает вклад ложных волн, но быстро возрастают погрешности амплитуд, подробнее см. [15].

Дефектность рассматриваемого метода Грайера ярко проявляется при сравнении исходных угловых распределений событий с восстановленными этим методом распределениями: последние не точны в случае начальной D_o -волны, а в случае D_+ -волны они резко искажены (вне зависимости от значения ε_{th}) в основном за счет мощной искусственной D_o -волны, см. Рис. 2.11.

Мы приходим таким образом к заключению, что метод ПВА, использованный в работах [76, 77, 80] для анализа реакции (2.1), не адекватен поставленной задаче. Поэтому, в частности, экспериментальные данные работы [76] по ПВА реакции (2.1) должны быть переанализированы с использованием метода максимума правдоподобия [15].

Глава 3. Парциально-волновой анализ реакции

$$\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$$

Исторически описанная в предыдущей главе методика парциально-волнового анализа двухмезонных систем была первоначально разработана для реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$. Существенными элементами этой методики были: программа Монте-Карло для моделирования многофотонных событий в эксперименте и вычисления эффективности регистрации событий, функционал минимизации для по-событийного фитирования наблюдаемых в эксперименте угловых распределений теоретическими, процедура нахождения всех нетривиальных решений ПВА по одному, случайно найденному в результате фита угловых распределений в каждом бине по массе, а также процедура сшивки всех нетривиальных решений ПВА в соседних массовых бинах, основанная на корнях функции Герстена.

Вместе с тем, прежде чем приступить к последовательному физическому анализу реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$, было крайне важным испытать эту новую методику на какойнибудь уже хорошо изученной реакции, но в рамках "старой" методики. В качестве таковой была выбрана реакция $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$, детальное исследование которой проводилось в ИФВЭ на протяжении уже более десяти лет, и где не было проблем с нахождением, выбором и интерпретацией физического решения, см. работы [85, 86, 87]. Другим методическим достоинством этой реакции является ее сравнительно большое сечение, так что данные по реакции являются хорошо статистически обеспеченными и, следовательно, все возможные огрехи анализа должны явным образом проявиться как статистически значимые эффекты. Наконец, данные по обеим реакциям набирались в реальных экспериментах одновременно, и в дифференциальных эффективностях по углам в системе Готтрида-Джексона обеих

реакций имеются заметные области с нулевой эффективностью. Это позволяло проблеме влияния областей нулевой эффективности на результаты ПВА также изучить вначале на более простой реакции.

В связи с вышеизложенным в данной главе мы представим результаты анализа реакции $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ в рамках описанной в предыдущей главе методики ПВА и убедимся в высокой эффективности методики, а в следующей главе применим эту уже опробованную методику для детального анализа реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$, где результаты не столь однозначны.

3.1. Изучение $\pi^0 \pi^0$ -системы при импульсе 38 ГэВ/с

Первое изучение $\pi^0 \pi^0$ -системы в рамках новой методики, в основном, с методической целью было предпринято на основе более чем 100 тыс. 4γ -событий, отобранных из данных сеанса 1980 г. на установке ГАМС-2000 при импульсе 38 ГэВ/с, см. [14]. Важной особенностью этого сеанса было сравнительно большое (9 м) расстояние спектрометра ГАМС от жидководородной мишени, а также отсутствие отбора событий по радиальному моменту при приеме данных¹, что обеспечило хорошие условия регистрации $\pi^0 \pi^0$ -системы от порога и до 1.7 ГэВ.

Отбор 85.5 тыс. $\pi^0 \pi^0$ -событий был произведен посредством кинематического анализа 4γ -событий на предмет совместимости их с кинематикой реакции

$$\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n \quad (3.1)$$

при одной конкурирующей гипотезе: $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$ (ЗС-фит, $\chi^2_{\pi^0 \pi^0 n} < \chi^2_{\eta \pi^0 n}$, $\chi^2_{\pi^0 \pi^0 n} < 12$), – детали см. в [14]. При этом влиянием других двухмезонных систем с четырьмя фотонами в конечном состоянии реакции можно пренебречь в силу доминирования реакции (3.1) в указанной области масс. Спектр $\pi^0 \pi^0$ -масс для отобранных в результате событий представлен на Рис.3.1. Он имеет

¹Этот отбор событий в триггере был введен в последующих сеансах для подавления регистрации событий с малой эффективной массой системы фотонов, попавших в спектрометр; в основном это касалось реакции $\pi^- p \rightarrow \pi^0_{\rightarrow 2\gamma} n$

хорошо известную резонансную структуру. В качестве особенности этих данных отметим здесь острый пик при массе 0.5 ГэВ, соответствующий регистрации событий реакции $\pi^- p \rightarrow K_S^0 \Lambda$, подробнее см. в [88]. Распределение по квадрату переданного импульса t отобранных событий (за исключением событий из пика K_S^0) имеет вид типичный для однопионного (ОРЕ) обмена. Чтобы дополнительно усилить относительный вклад однопионного обмена, лишь события с $-t < 0.2$ (ГэВ/с)² были оставлены для дальнейшего анализа, что привело к потере 18% событий.

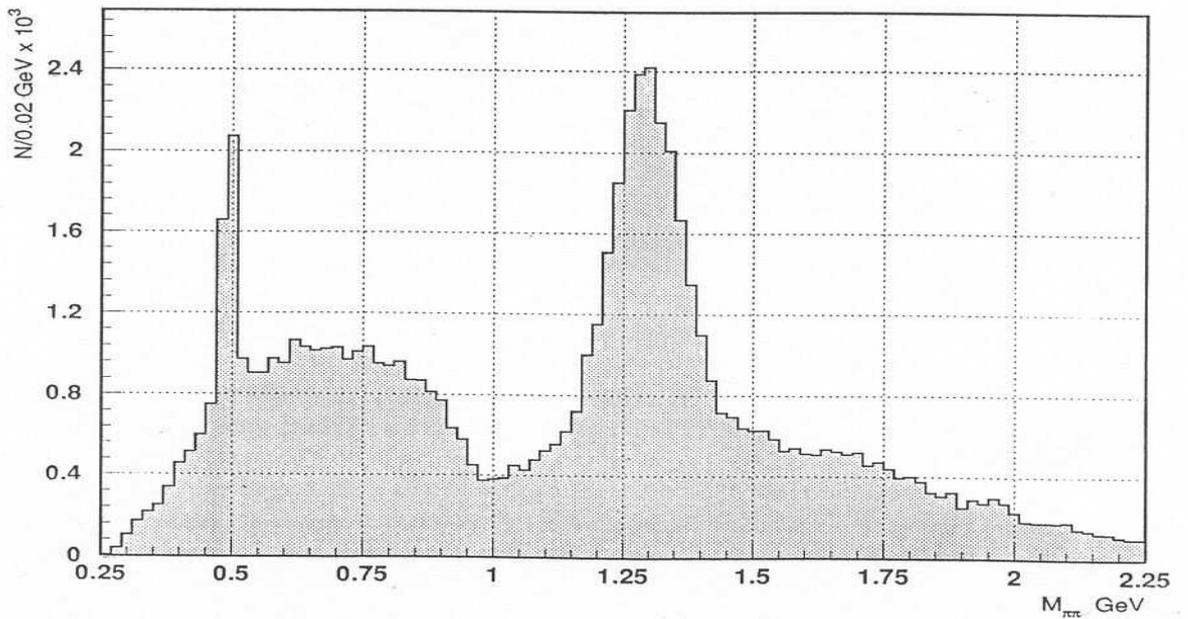


Рис. 3.1: Спектр инвариантных масс $2\pi^0$ -систем в реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)²: 3С-фит, $\chi_{\pi^0\pi^0 n}^2 < \chi_{\eta\pi^0 n}^2$, $\chi_{\pi^0\pi^0 n}^2 < 12$. Сеанс 1980 г. на установке ГАМС-2000.

3.1.1. Модель ПВА, фит угловых распределений

Парциально-волновой анализ отобранных событий был проведен в 20 МэВ интервалах по массе $2\pi^0$ системы в области до 1.7 ГэВ. При этом учитывались только S , D_0 , D_- и D_+ -волны, что вполне достаточно для указанного диапазона масс. В результате угловое распределение событий в системе Готтфрида-Джексона должно иметь вид:

$$4\pi I(\Omega_{GJ}) = |H_-(\Omega_{GJ})|^2 + |H_+(\Omega_{GJ})|^2, \quad (3.2)$$

где

$$H_-(\Omega_{GJ}) = S + \sqrt{5} D_0 P_2^0(\cos\theta) + \sqrt{5/3} D_- P_2^1(\cos\theta) \cos\phi \quad (3.3)$$

и

$$H_+(\Omega_{GJ}) = \sqrt{5/3} D_+ P_2^1(\cos\theta) \sin\phi, \quad (3.4)$$

см. уравнение (2.12) и (2.13). Фитирование угловых распределений в каждом 20 МэВ интервале по массе $2\pi^0$ системы проводилось при помощи программы MINUIT [79] методом максимума правдоподобия. Минимизировался функционал, см. (2.26):

$$F_{ML} = - \sum_{i=1}^N \ln I(\Omega_{GJ}^i) + \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} I_{\lambda}, \quad (3.5)$$

где I_{λ} и ε_{λ} - коэффициенты разложения углового распределения (3.2) и эффективности регистрации событий реакции (3.1) в ряд по сферическим гармоникам $Y_{\lambda}(\Omega)$, соответственно, см. (2.7).

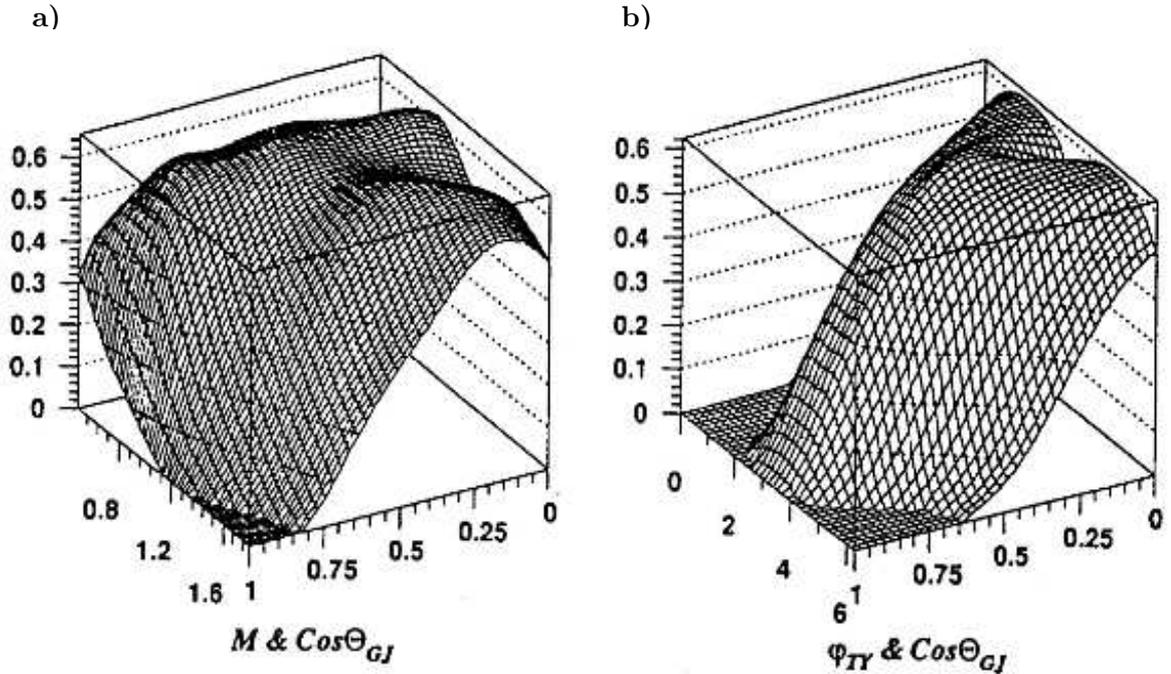


Рис. 3.2: Двумерные срезы трехмерной эффективности (3.6) событий реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)²: а) при $\phi = \pi$ и б) при $M_{2\pi^0} = 1.3$ ГэВ. Сеанс 1980 г. на установке ГАМС-2000.

Фурье-параметризация МК-эффективности регистрации была получена во всем диапазоне масс $2\pi^0$ системы в виде:

$$\varepsilon(\Omega_{GJ}, M_{2\pi^0}) = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}(M_{2\pi^0}) \cdot Y_{\lambda}(\Omega_{GJ}). \quad (3.6)$$

В качестве иллюстрации на Рис.3.2 приведены двумерные срезы эффективности (3.6) при $\phi = \pi$ и $M_{2\pi^0} = 1.3$ ГэВ.

Качество фитирования угловых распределений при проведении ПВА иллюстрируется Рис. 3.3, где приведен пример фита угловых распределений в системе Готтфрида-Джексона для бина по массе $2\pi^0$ -системы из области пика $f_2(1270)$ -мезона. Аналогичное качество фитирования угловых распределений имеет место и в других бинах по массе $2\pi^0$ -системы.

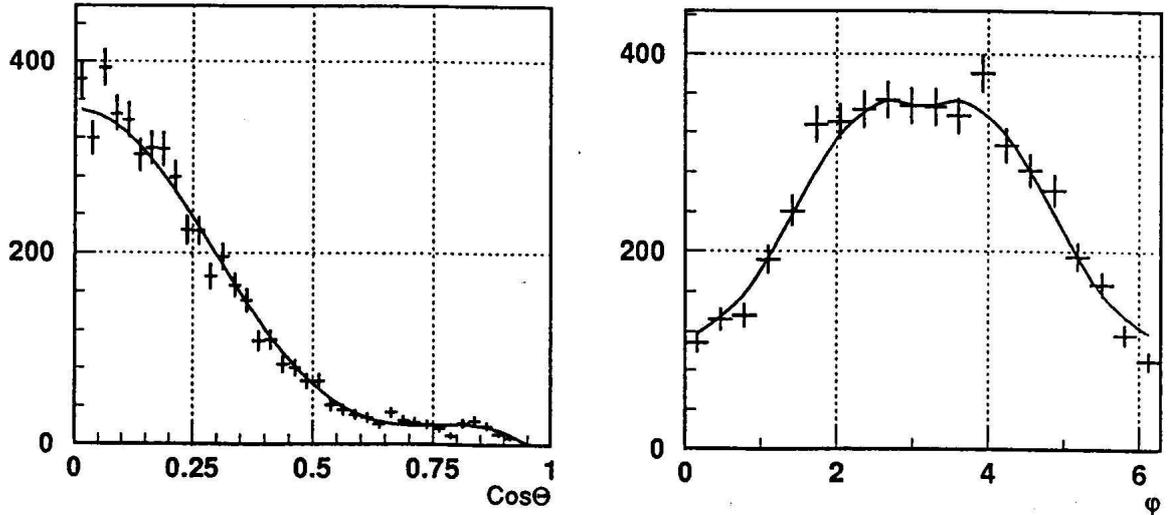


Рис. 3.3: Пример фита угловых распределений в системе Готтфрида-Джексона для бина по массе $2\pi^0$ -системы из области пика $f_2(1270)$ -мезона в реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с. Сеанс 1980 г. на установке ГАМС-2000.

3.1.2. Результаты ПВА при импульсе 38 ГэВ/с, сеанс 1980 г.

При учете в ПВА только S , D_0 , D_- и D_+ -волн в каждом бине по массе $2\pi^0$ -системы существуют два нетривиальных решения, которые были найдены методом, описанным в предыдущей главе. При этом сшивка решений в соседних массовых бинах осуществлялась по корням функции Герстена (2.18). Оказалось, что полученные в результате глобальные решения хорошо разделяются, и идентификация физического решения не вызывает затруднений в силу его хорошо известных физических особенностей. А именно, в интенсивностях D -волн доминирует $f_2(1270)$ -мезон, и при этом все D -волны зануля-

ются в околороговой области масс $2\pi^0$ -системы, а интенсивность S -волны практически линейно растет от порога системы. Далее в S -волне наблюдается острый провал, обусловленный деструктивной интерференцией $f_0(980)$ -резонанса с нерезонансным S -волновым фоном, см. Рис. 3.4. Отметим также,

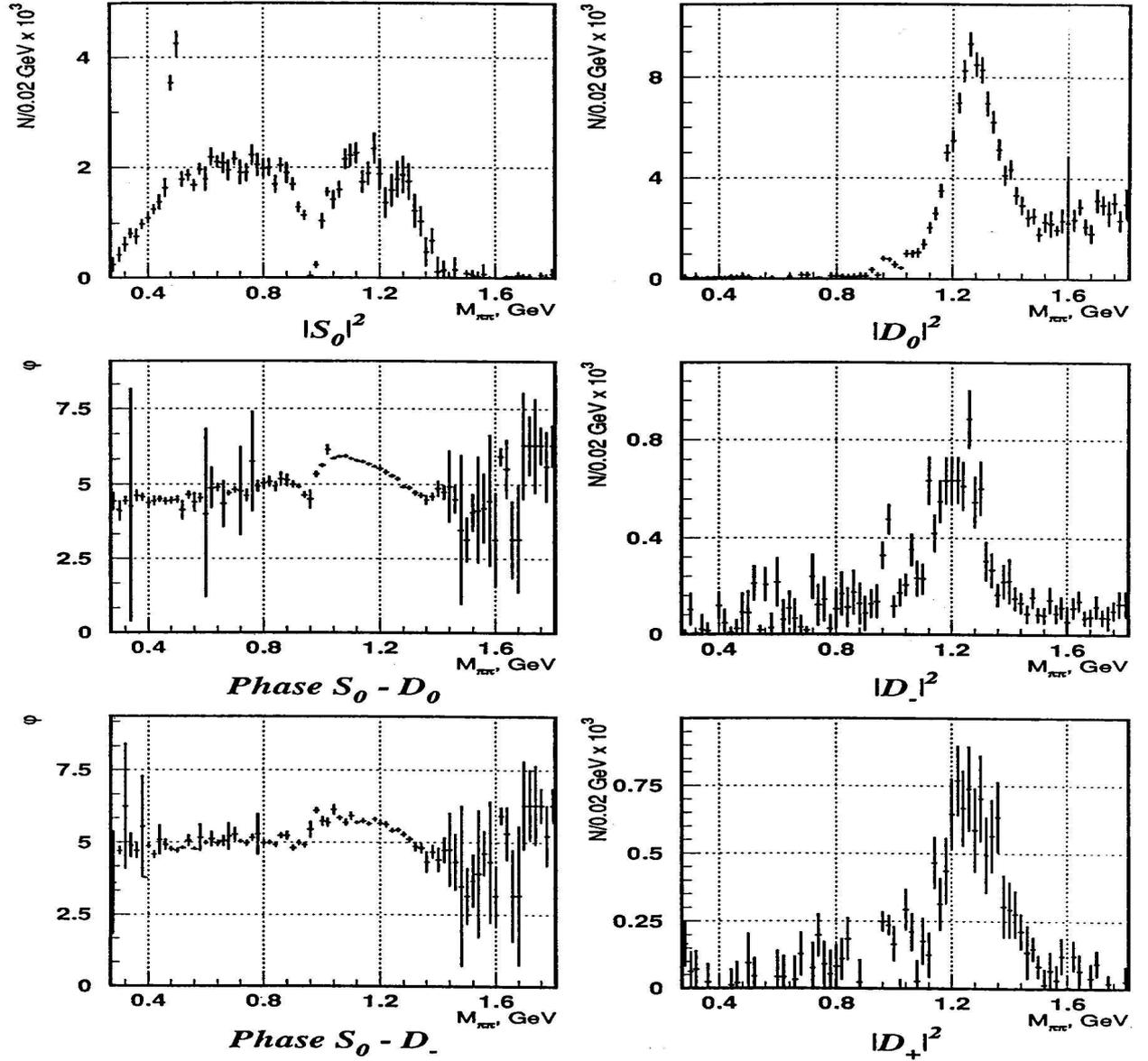


Рис. 3.4: Физическое решение в ПВА событий реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)². Сеанс 1980 г. на установке ГАМС-2000.

практически нулевую разность фаз D_0 и D_- -волн, что является следствием известного эффекта фазовой когерентности [71]. Наконец, качество проведенного анализа характеризуется четким пиком от распада $K_s^0 \rightarrow 2\pi^0$ в интенсивности S -волны при одновременном полном его отсутствии в интен-

сивностях D -волн.

Нефизическое решение можно найти в работе [14]. Характерная его особенность - это нефизическое поведение D -волн вблизи порога $2\pi^0$ -системы. Особенно это касается D_- и D_+ -волн, интенсивности которых линейно растут от $2\pi^0$ -порога. В целях экономии места мы здесь его не приводим.

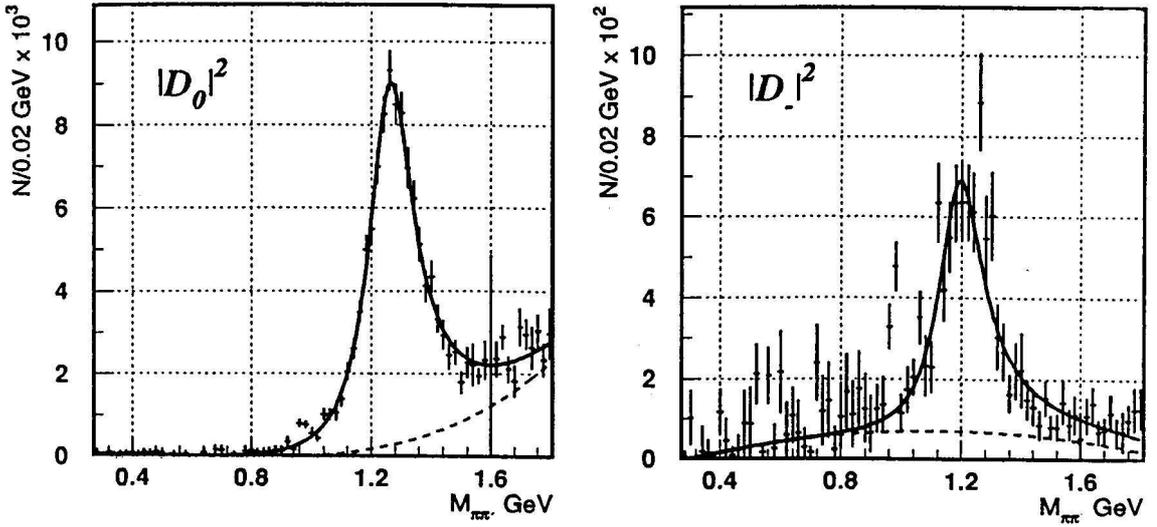


Рис. 3.5: Интенсивности D -волн в реакции $\pi^-p \rightarrow 2\pi^0n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)², профитированные функцией релятивистского Брейта-Вигнера и полиномиальным фоном; фит показан сплошной линией, полиномиальный фон - штриховой линией. Слева: интенсивность D_0 ; справа: интенсивность D_- . Сеанс 1980 г. на установке ГАМС-2000.

Чтобы определить сечение рождения $f_2(1270)$ -мезона в состояниях с различными поляризациями, интенсивности D_0 , D_- и D_+ -волн были профитированы функцией релятивистского Брейта-Вигнера с динамической шириной, см. [89], и полиномиальным фоном, см. Рис. 3.5. В качестве нормировки использовалось хорошо известное сечение реакции $\pi^-p \rightarrow \eta_{\rightarrow 2\gamma}n$ [90, 91]. В результате сечения при импульсе 38 ГэВ/с были получены равными:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{D_0}(\pi^-p \rightarrow f_2n) \cdot BR(f_2 \rightarrow 2\pi^0) &= 2.2 \pm 0.2 \pm 0.25 \mu b, \\
 \sigma_{D_-}(\pi^-p \rightarrow f_2n) \cdot BR(f_2 \rightarrow 2\pi^0) &= 0.14 \pm 0.02 \pm 0.03 \mu b, \\
 \sigma_{D_+}(\pi^-p \rightarrow f_2n) \cdot BR(f_2 \rightarrow 2\pi^0) &= 0.22 \pm 0.03 \pm 0.03 \mu b.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Первые ошибки здесь являются статистическими, вторые - систематическими, детали см. в [14]. Полученные в результате фита параметры $f_2(1270)$ -мезона находятся в хорошем согласии с данными PDG [92]. Полезно отметить здесь также, что сечения (3.7) находятся в достаточно хорошем согласии с таковыми, полученными ранее в рамках совершенно другой методики [93].

3.1.3. Результаты ПВА при импульсе 38 ГэВ/с, сеанс 1984 г.

В сеансе 1984 г. [17] также при импульсе 38 ГэВ/с на установке ГАМС-2000 была набрана статистика более чем на порядок величины большая, чем в сеансе 1980 г. При этом в отличие от сеанса 1980 г. спектрометр ГАМС-2000 был расположен на расстоянии 4.3 м от жидководородной мишени, и специальный триггер второго уровня подавлял регистрацию событий с массой системы $k\gamma$ в реакции (1.1) меньшей 0.6 ГэВ, подробнее см. в работе [88]. Это позволило провести ПВА реакции (3.1) в области масс от 0.6 ГэВ до 2.5 ГэВ и в диапазоне по квадрату переданного импульса $|t|$, расширенном до 1 $(\text{ГэВ}/\text{с})^2$. Для сравнения с данными сеанса 1980 г. на Рис. 3.6 представлен спектр масс $2\pi^0$ -систем в реакции (3.1) при $-t < 0.2 (\text{ГэВ}/\text{с})^2$ по данным сеанса 1984 г., ср. с Рис. 3.1.

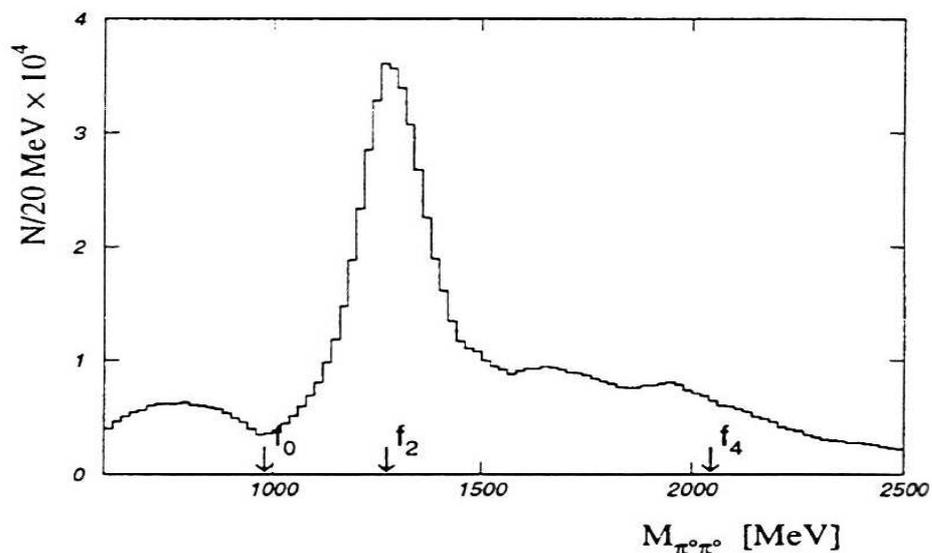


Рис. 3.6: Спектр масс $2\pi^0$ -систем в реакции $\pi^-p \rightarrow 2\pi^0n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.2 (\text{ГэВ}/\text{с})^2$, 3С-фит. Стрелками показаны массы $f_0(980)$ -, $f_2(1270)$ - и $f_4(2050)$ -мезонов. Сеанс 1984 г. на установке ГАМС-2000.

Обработка данных сеанса 1984 г. велась аналогично обработке сеанса 1980 г. за тем исключением, что ПВА был проведен независимо в нескольких интервалах по $|t|$ вплоть до 1 (ГэВ/с)^2 с учетом S , D_0 , D_- , D_+ , а также G_0 , G_- и G_+ волн. При этом в соответствии с работой [94] полагалось, что $|G_-| = |G_+|$ при малых $|t|$, а эффективность регистрации событий была параметризована в виде ряда Фурье (3.6), коэффициенты которого зависели как от массы $2\pi^0$ -системы, так и от квадрата переданного импульса системе t , детали см. в работе [16].

Введение в ПВА указанных выше G -волн приводит к восьми нетривиальным решениям в каждом интервале (бине) по массе $2\pi^0$ -системы. Сшивка решений в соседних интервалах по массе проводилась с использованием корней функции Герстена (2.18). Полученные глобальные решения при $|t| < 0.2 \text{ (ГэВ/с)}^2$ во всем интервале масс хорошо разделяются. Вместе с тем, выбор физического решения из 8 возможных является уже непростой задачей. Его идентификация осуществлялась на основе физических критериев: четыре решения были отброшены, как имеющие нефизическое поведения G -волн при малых массах $2\pi^0$ -системы (наблюдаются пики в области масс $f_2(1270)$ -мезона); еще два решения были отброшены, поскольку не удовлетворяли условию фазовой когерентности G_0 и G_- -волн, см. [94]. Оставшиеся в результате два решения различаются между собой весьма незначительно и демонстрируют все характерные особенности физического решения, а именно, доминирующий пик от $f_2(1270)$ в D_0 -волне, соответствующие пики в D_- и D_+ -волнах (ср. с Рис. 3.4), а также аналогичные пики от $f_4(2050)$ -мезона в G -волнах. Механизмы образования $f_2(1270)$ - и $f_4(2050)$ -мезонов (соотношения D и G -волн с различной поляризацией) также очень похожи: оба мезона при малых $|t|$ рождаются посредством доминирующего однопионного обмена с небольшим поглощением, которое описывается моделью Окса-Вагнера [94]. При этом в D_0 -волне в области масс выше $f_2(1270)$ -мезона не наблюдается каких либо значимых структур. Ее интенсивность в области $f_2(1810)$ -резонанса [95] на два порядка меньше, чем в районе $f_2(1270)$ -пика, что позволяет дать

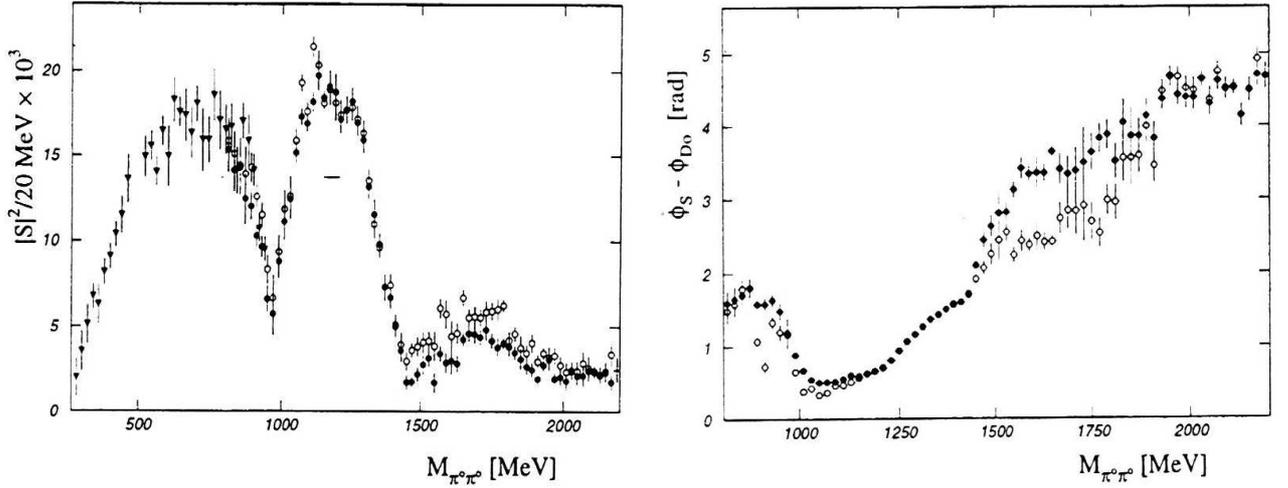


Рис. 3.7: Слева: интенсивность S -волны по данным сеанса 1984 г. на установке ГАМС-2000 для двух решений ПВА реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)², удовлетворяющих критериям физического решения при $M_{2\pi^0} > 800$ МэВ; справа: относительная фаза S и D_0 -волн в указанных решениях. Разные решения показаны открытыми и полными кружками. На рисунке слева при $M_{2\pi^0} < 800$ МэВ треугольниками показана соответствующим образом нормированная интенсивность S -волны в физическом решении по данным сеанса 1980 г., см. Рис. 3.4 (два бина из области K^0 -мезона на рисунке опущены).

достаточно сильное ограничено на сечение образования $f_2(1810)$:

$$\frac{\sigma_{D_0}(\pi^- p \rightarrow f_2(1810)n) \cdot BR(f_2(1810) \rightarrow 2\pi^0)}{\sigma_{D_0}(\pi^- p \rightarrow f_2(1270)n) \cdot BR(f_2(1270) \rightarrow 2\pi^0)} < \frac{1}{50}, \quad (3.8)$$

подробнее см. в [17].

Однако основной интерес в проведенном анализе представляет поведение S -волны, квадрат амплитуды которой в зависимости от массы $2\pi^0$ -системы представлен на Рис.3.7 слева, а разность фаз S и D_0 -волн — на этом же рисунке справа. При этом в области масс до 800 МэВ на рисунке слева показано единственное решение по данным ПВА сеанса 1980 г. (см. Рис.3.4), а при $M_{2\pi^0} > 800$ МэВ показаны уже оба обсуждавшиеся выше решения по данным сеанса 1984 г. Как и в ПВА по данным 1980 г. в интенсивности S -волны виден провал в области $f_0(980)$ -мезона, ср. с Рис. 3.4, а также провал в области 1490 МэВ с последующим широким максимумом при 1700 МэВ, которые раньше не наблюдались. Достаточно узкий провал при 1490 МэВ можно интерпретировать, как проявление $f_0(1500)$ -мезона в деструктивной интерференции с нерезонансной S -волной, подобно проявлению

$f_0(980)$ -мезона при меньших массах. Аргументами в пользу такой интерпретации может служить быстрое изменение относительной фазы S и D_0 -волн в областях $f_0(980)$ - и $f_0(1500)$ -мезонов, см. Рис. 3.7 справа. Одновременно это позволяет высказать предпочтение решению, показанному на Рис. 3.7 черными кружками, как единственному физическому, поскольку для него вариация относительной фазы S и D_0 -волн является более выраженной.

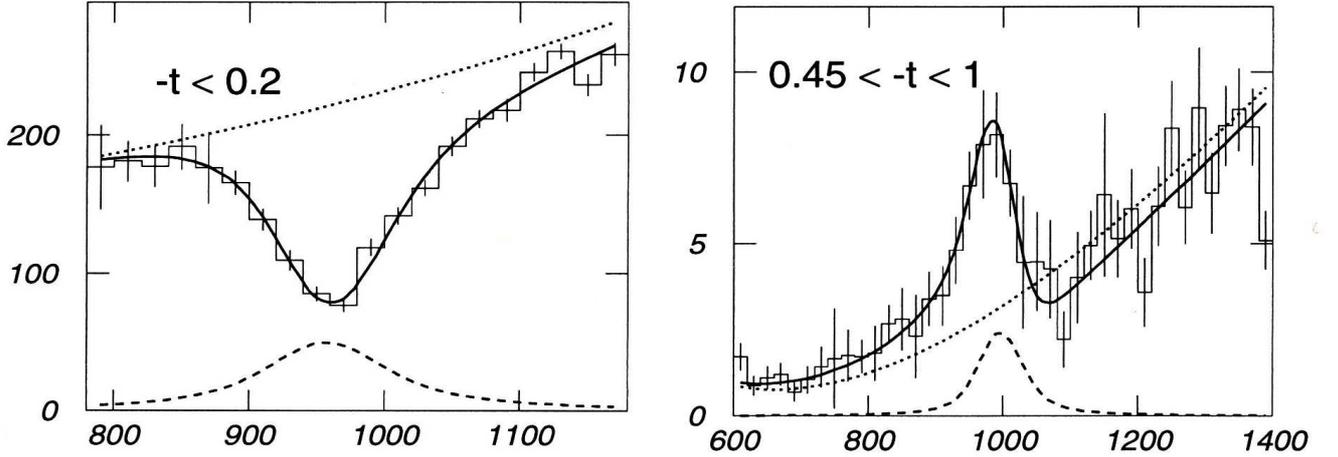


Рис. 3.8: Интенсивность S -волны по данным ПВА сеанса 1984 г. в реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)² (слева), а также при $0.45 < -t < 1.0$ (ГэВ/с)² (справа). Сплошной линией показан фит функцией Брейта-Вигнера и полиномиальным фоном с учетом интерференции, фон показан пунктирной линией, штриховой линией показан Брейт-Вигнер. Рисунки взяты из работы [97].

Другим аргументом является поведение S -волны в области $f_0(980)$ -мезона по данным ПВА (сеанс 1984 г.) в области переданных импульсов $0.45 < -t < 1.0$ (ГэВ/с)², где $f_0(980)$ уже виден в виде четкого пика, см. Рис. 3.8 справа [97]. Фитирование квадрата S -волны функцией Брейта-Вигнера и полиномиальным фоном с учетом интерференции дало следующие значения параметров $f_0(980)$ -мезона:

$$M_{f_0} = 997 \pm 5 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{f_0} = 48 \pm 10 \text{ MeV}, \quad (3.9)$$

что хорошо согласуется данными таблицы частиц [92]. Другие детали можно найти в работах [96, 97, 98].

3.2. Изучение $\pi^0\pi^0$ -системы при импульсе 100 ГэВ/с

Как уже отмечалось выше, параллельно с экспериментами на установке ГАМС-2000 при импульсе 38 ГэВ/с в ИФВЭ аналогичные измерения проводились также и в эксперименте NA12 при импульсе 100 ГэВ/с в ЦЕРН с использованием спектрометра ГАМС-4000. При этом в сеансах 1984 г. спектрометр ГАМС-4000 был установлен на расстоянии 15 м от жидководородной мишени, что позволяло эффективно детектировать $2\pi^0$ -системы, образующиеся в реакции (3.1), в области масс вплоть до 3 ГэВ. Особенности постановки этого эксперимента, а также процедур отбора и обработки данных можно найти в работе [11]. Здесь же мы отметим лишь, что окончательный отбор $2\pi^0$ -событий проводился по результатам кинематического анализа 4γ -событий (ЗС-фит, $\chi < 8.3$) с 5-ю конкурирующими гипотезами: $\pi^0\pi^0$, $\pi^0\eta$, $\eta\eta$, $\pi^0\eta'$ и $\eta\eta'$. В результате уровень фона в полученном ансамбле $2\pi^0$ -событий не превышал 1%, а полное количество $2\pi^0$ -событий по данным сеанса 1984 г. составляло 644 тысячи. Для дальнейшего анализа использовались только события с $-t < 0.2$ (ГэВ/с)², где доминирует однопионный обмен. Спектр масс этих событий приведен на Рис.3.9.

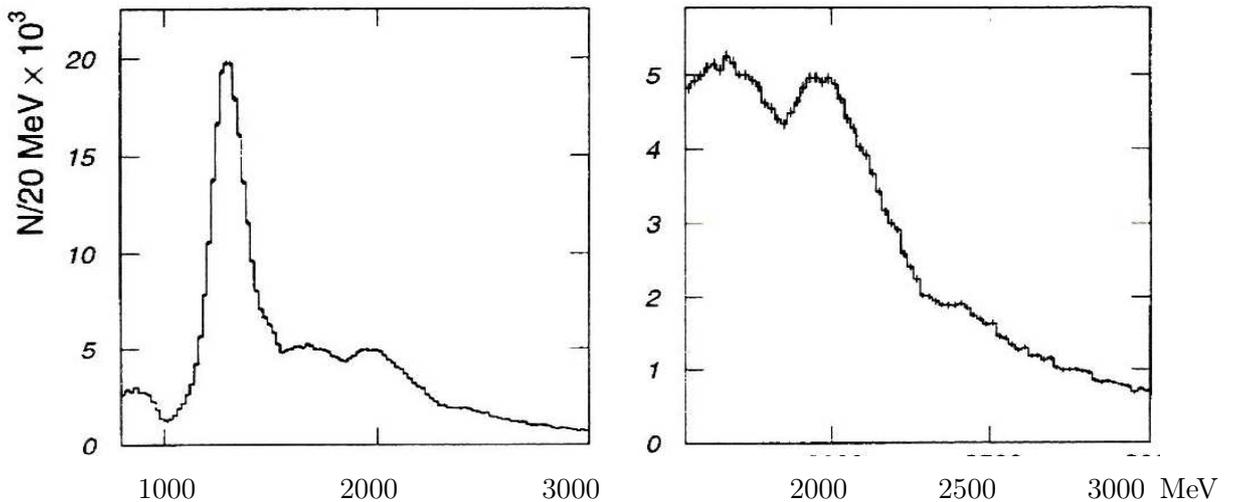


Рис. 3.9: Спектр масс $2\pi^0$ -систем в реакции $\pi^-p \rightarrow 2\pi^0n$ при импульсе 100 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)² по данным сеансов 1984 г. в эксперименте NA12, ЗС-фит, $\chi < 8.3$, [11]. Слева показан полный спектр масс, справа — область больших масс крупным планом.

Как видно из рисунка, полученный спектр масс $2\pi^0$ -систем имеет все характерные особенности, присущие приведенному выше спектру $2\pi^0$ -масс при импульсе 38 ГэВ/с, см. Рис.3.6, включая доминирующий $f_2(1270)$ -пик, дип в области $f_0(980)$ -мезона, четкий пик предположительно от $f_4(2050)$ -мезона (см. Рис.3.9 справа), а также плечо в области $f_6(2510)$ -мезона, которое стало ясно выраженным в этих данных из-за лучшего аксептанса установки ГАМС-4000 в области больших масс при импульсе 100 ГэВ/с.

3.2.1. Модель ПВА и проблема неоднозначности решений

Парциально-волновой анализ событий реакции (3.1) при импульсе 100 ГэВ/с был проведен в области масс $2\pi^0$ -систем от 0.8 до 3.0 ГэВ. При этом в области масс до 1.5 ГэВ анализ проводился в 20 МэВ интервалах по массе $2\pi^0$ -системы, а в области масс от 1.5 и до 3.0 ГэВ бин по массе был удвоен. В ПВА учитывались все четные волны со спином $l \leq 6$ и проекцией на третью ось $|m| \leq 1$. Вклад других волн, включая таковые с $|m| > 1$, в рассматриваемой области масс оказался пренебрежимо мал, что, в частности, следует и из соответствующих распределений по углу Траймана-Янга.

Угловое распределение событий в системе Готтфрида-Джексона в каждом массовом интервале параметризовалось в виде:

$$I(\Omega) = |h_0(\cos\theta) + h_-(\cos\theta) \cos\phi|^2 + |h_+(\cos\theta) \sin\phi|^2, \quad (3.10)$$

где функции $h_0(\cos\theta)$, $h_-(\cos\theta)$ и $h_+(\cos\theta)$ записываются в терминах парциальных амплитуд S , D , G и J , соответствующих спином 0, 2, 4 и 6, следующим образом:

$$\sqrt{4\pi}h_0(\cos\theta) = SP_0^0(\cos\theta) + \sqrt{5}D_0P_2^0(\cos\theta) + \sqrt{9}G_0P_4^0(\cos\theta) + \sqrt{13}J_0P_6^0(\cos\theta) \quad (3.11)$$

$$\sqrt{4\pi}h_{\pm}(\cos\theta) = \sqrt{3/5} D_{\pm}P_2^0(\cos\theta) + \sqrt{9/10} G_{\pm}P_4^0(\cos\theta) + \sqrt{13/21} J_{\pm}P_6^0(\cos\theta), \quad (3.12)$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ - присоединенные функции Лежандра от аргумента $\cos\theta$.

Эффективность регистрации событий реакции (3.1) вычислялась методом Монте-Карло как функция четырех существенных переменных: массы $2\pi^0$ -системы $M_{2\pi}$, квадрата переданного импульса t и двух углов в системе Готтфрида-Джексона — θ и ϕ . Генерация событий МК велась равномерно по переменным $\cos\theta$, ϕ и $e^{\alpha t}$ ($\alpha = 5 \text{ с}^2/\text{ГэВ}^2$) на множестве эквидистантных точек по массе $M_{2\pi}$ с шагом 0.1 ГэВ в области масс от 0.6 до 3.0 ГэВ. В сумме было сгенерено 15 млн. МК событий. Окончательно эффективность параметризовалась в виде 4-х мерного ряда Фурье:

$$\varepsilon(\Omega, t, M_{2\pi}) = \sum_{lmkn} \varepsilon_{lmkn} \text{Re}Y_l^m(\Omega) P_k(a_1 + b_1 e^{\alpha t}) P_n(a_2 + b_2 M_{2\pi}), \quad (3.13)$$

где $P_k(x)$ - полиномы Лежандра, а пары параметров a_1, b_1 и a_2, b_2 были выбраны так, чтобы области изменения аргументов $(a_1 + b_1 e^{\alpha t})$ и $(a_2 + b_2 M_{2\pi})$ соответствующих полиномов Лежандра совпали с областью определения последних, т.е. $[-1, +1]$. В качестве примера на Рис. 3.10 приведены полученные в результате интегрирования по $-t$ эффективности (3.13) в пределах от 0 до $0.2 (\text{ГэВ}/\text{с})^2$ для значений масс $M_{2\pi} = 1.3$ и 2.0 ГэВ.

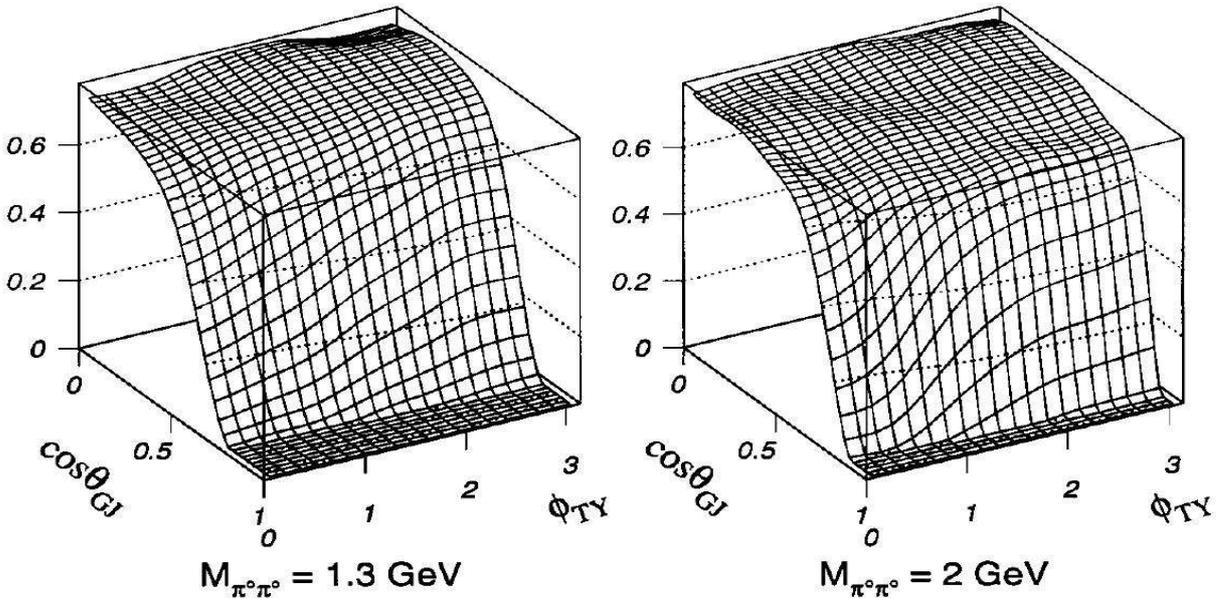


Рис. 3.10: Двумерные эффективности регистрации событий реакции (3.1) при импульсе 100 ГэВ/с, проинтегрированные по $-t$ в пределах от 0 до $0.2 (\text{ГэВ}/\text{с})^2$ для двух значений масс: $M_{2\pi^0} = 1.3$ ГэВ (слева) и 2.0 ГэВ (справа). Эксперимент NA12, сеанс 1984 г.

Анализ угловых распределений экспериментальных событий проводился независимо в каждом бине по массе $2\pi^0$ -системы $\Delta M_{2\pi}$ посредством минимизации по-событийного функционала метода максимума правдоподобия

$$F_{ML} = - \sum_{i=1}^N \ln I(\Omega_i) + \sum_{LM} t_L^M \varepsilon_L^M, \quad (3.14)$$

где N - число экспериментальных событий в интервале $\Delta M_{2\pi}$, ε_L^M - коэффициенты разложения эффективности в ряд (3.13), вычисленные в центре массового интервала $\Delta M_{2\pi}$ и проинтегрированные по t с учетом экспериментальной t -зависимости сечения, и, наконец, t_L^M - моменты разложения углового распределения событий (3.10) в ряд по сферическим гармоникам, выраженные в терминах парциальных амплитуд (см. уравнение (2.9), а также работу [72]), которые и использовались в качестве фитируемых параметров при минимизации функционала (3.14).

ПВА реакции (3.1) в области масс от 0.8 до 2.4 ГэВ проводился с учетом S , D_0 , D_- , D_+ , G_0 , G_- и G_+ волн, а в области масс от 1.8 до 3.0 ГэВ — дополнительно с учетом и J -волн: J_0 , J_- и J_+ . Проблема неоднозначности решений ПВА в каждом массовом интервале решалась методом функций Герстена, см. (2.18). При учете только S , D , G -волн с $|m| \leq 1$ неоднозначности ПВА (8 нетривиальных решений) характеризуются четырьмя корнями функции Герстена, а в случае S , D , G и J -волн ($|m| \leq 1$) — шестью корнями функции Герстена (32 нетривиальных решения). Реальные и мнимые части найденных в каждом массовом интервале корней функций Герстена приведены на Рис. 3.11. Как видно из рисунка, корни в соседних массовых бинах (особенно это касается их реальных частей) хорошо разделяются, что позволяет легко провести сшивку глобальных решений ПВА в указанных выше интервалах масс, используя критерий (2.22), детали см. в работе [11].

3.2.2. Парциально-волновой анализ в области масс до 2.4 ГэВ

Особенностью данных по реакции (3.1) при импульсе 100 ГэВ/с является зануление эффективности регистрации событий в довольно значительной

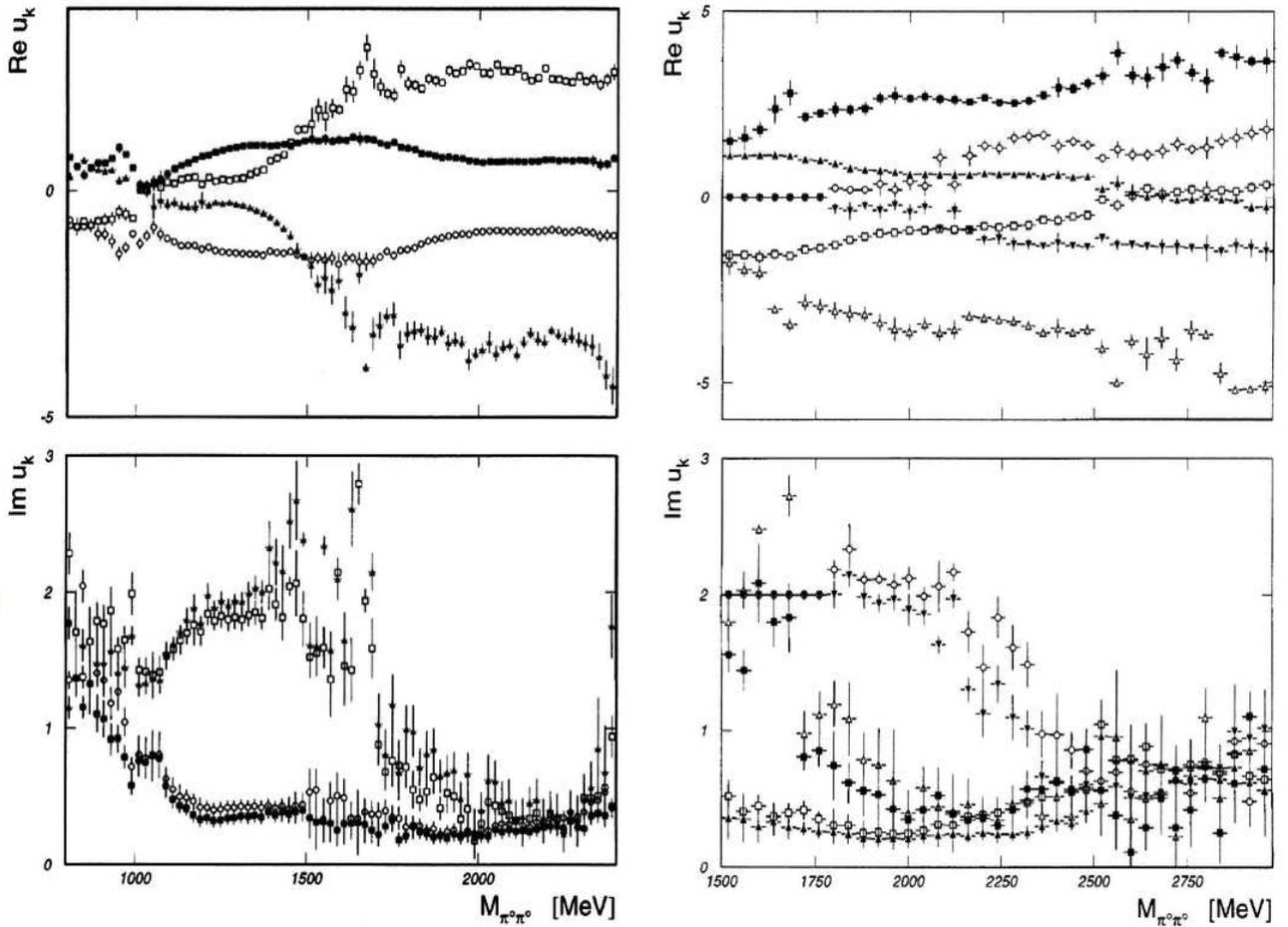


Рис. 3.11: Слева: реальные (вверху) и мнимые (внизу) части четырех корней функции Герстена в зависимости от массы системы $2\pi^0$, полученные в ПВА реакции (3.1) при учете S , D и G -волн с $|m| \leq 1$ в области масс до 2400 МэВ. Справа: реальные (вверху) и мнимые (внизу) части шести корней функции Герстена в зависимости от массы системы $2\pi^0$, полученные при учете S , D , G и J -волн с $|m| \leq 1$ в области масс от 1800 до 3000 МэВ.

области углов в системе Готтфрида-Джексона вблизи $\cos\theta = 1$ при относительно малых массах $2\pi^0$ -системы, см. Рис. 3.10, что заметно затрудняет проведение ПВА при учете указанного выше ансамбля парциальных волн, поскольку приводит к неустойчивости процедуры фитирования угловых распределений. Чтобы преодолеть эти трудности на амплитуды G_0 , G_- и G_+ при $M_{2\pi} < 1.5$ ГэВ были наложены дополнительные условия, исходя из уже известных результатов ПВА при импульсе 38 ГэВ/с, а именно, квадраты этих амплитуд описывались экспонентами, падающими вместе с $2\pi^0$ -массой, начиная с $M_{2\pi} = 1.5$ ГэВ. В процессе фита эти квадраты амплитуд были фиксированы. Аналогичные связи были наложены и на амплитуды D_0 , D_- и D_+

но уже при $M_{2\pi} < 1$ ГэВ.

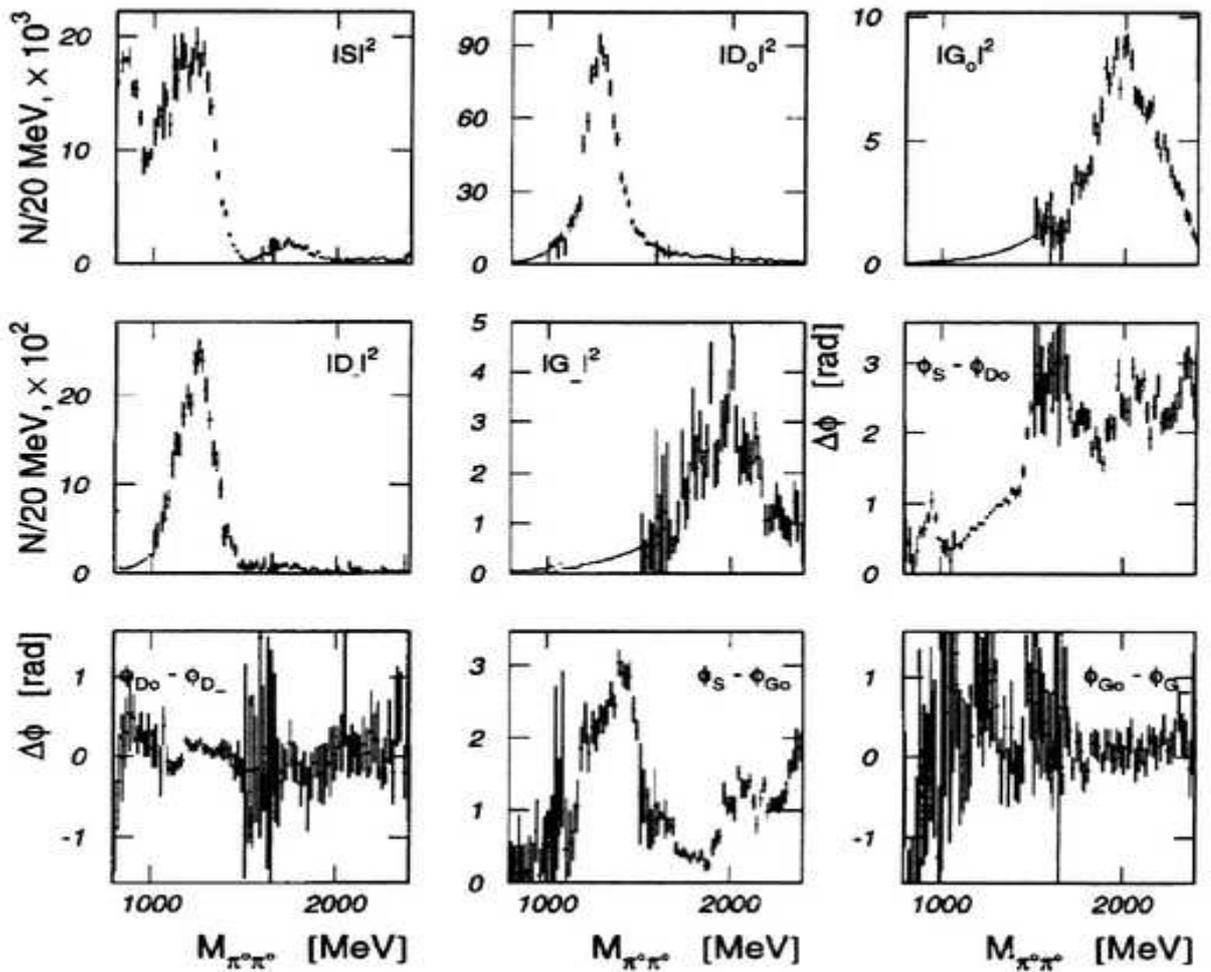


Рис. 3.12: Физическое решение в ПВА реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 100 ГэВ/с, $-t < 0.2$ (ГэВ/с)² и учете S , D и G -волн с $|m| \leq 1$ в области масс до 2.4 ГэВ. Фиксированные значения квадратов амплитуд G_0 и G_- показаны сплошными линиями.

Физическое решение из полученных восьми глобальных нетривиальных решений ПВА показано на Рис. 3.12. Оно было выделено на основе тех же критериев, которые были использованы ранее при анализе 38 ГэВ/с данных, и имеет ожидаемый вид с наличием известных резонансов в S , D и G -волнах, см. [11]. При этом $X_2(1810)$ -резонанс [95] как и при импульсе 38 ГэВ/с, см. подраздел 3.1.3, не наблюдается, несмотря на высокую статистическую обеспеченность данного эксперимента.

3.2.3. Парциально-волновой анализ в области масс до 3.0 ГэВ

Для изучения области больших масс ПВА реакции (3.1) был проведен независимо в 40 МэВ бинах по массе $2\pi^0$ -системы от 1.8 до 3.0 ГэВ с учетом S , D_0 , D_- , D_+ , G_0 , G_- , G_+ , J_0 , J_- и J_+ волн. В результате было обнаружено, что в пределах статистических ошибок вклад J_- и J_+ -волн равен нулю. Поэтому из последующего анализа они были исключены. Чтобы еще больше уменьшить число фитируемых параметров (амплитуд) и тем самым улучшить устойчивость процедуры фитирования, несколько дополнительных связей между амплитудами было также введено прежде, чем фитировать угловые распределения событий.

Во-первых, в соответствии с моделью Окса-Вагнера были введены связи между модулями амплитуд: $|D_-| = |D_+|$ и $|G_-| = |G_+|$, а также использовано условие фазовой когерентности для D_0 и D_- , равно как и для G_0 и G_- -волн: $\phi_{D_0} = \phi_{D_-}$ и $\phi_{G_0} = \phi_{G_-}$.

Во-вторых, было обнаружено, что разность фаз волн с натуральной и ненатуральной спин-четностью, соответствующих одинаковым L , равны в пределах статистических ошибок, что позволило ввести еще одну связь между фазами этих волн: $\phi_{G_+} - \phi_{D_+} = \phi_{G_-} - \phi_{D_-}$.

В результате ПВА был проведен с девятью фитируемыми действительными параметрами: шестью модулями амплитуд $|S|$, $|D_0|$, $|D_-|$, $|G_0|$, $|G_-|$, $|J_0|$, и тремя относительными фазами $\phi_S - \phi_{D_0}$, $\phi_{G_0} - \phi_{D_0}$ и $\phi_{J_0} - \phi_{D_0}$. Полученные 32 глобальных нетривиальных решения были далее проанализированы с целью отбросить нефизические. Так были сразу отброшены 16 решений, в которых наблюдается четкий пик в J_0 -волне, равно как и значимая нефизическая структура в J_- волне в области $f_4(2050)$ -мезона, поскольку спин $f_4(2050)$ -мезона, а также спин-волновая структура $2\pi^0$ -системы в этой области масс заведомо хорошо известны.

В каждом из оставшихся 16 решений наблюдается ясный пик в J_0 -волне. При этом в J_- волне не наблюдается никакой статистически значимой струк-

туры. Ее интенсивность в пределах ошибок измерений равна нулю во всех этих решениях. Что же касается G -волн, то их поведение заметно варьируется от решения к решению. Для нас важно, что в 8-ми из указанных 16 решений G -волны демонстрируют пики в области $f_2(1270)$ -мезона, см. [11]. Эти решения также были отброшены как нефизические.

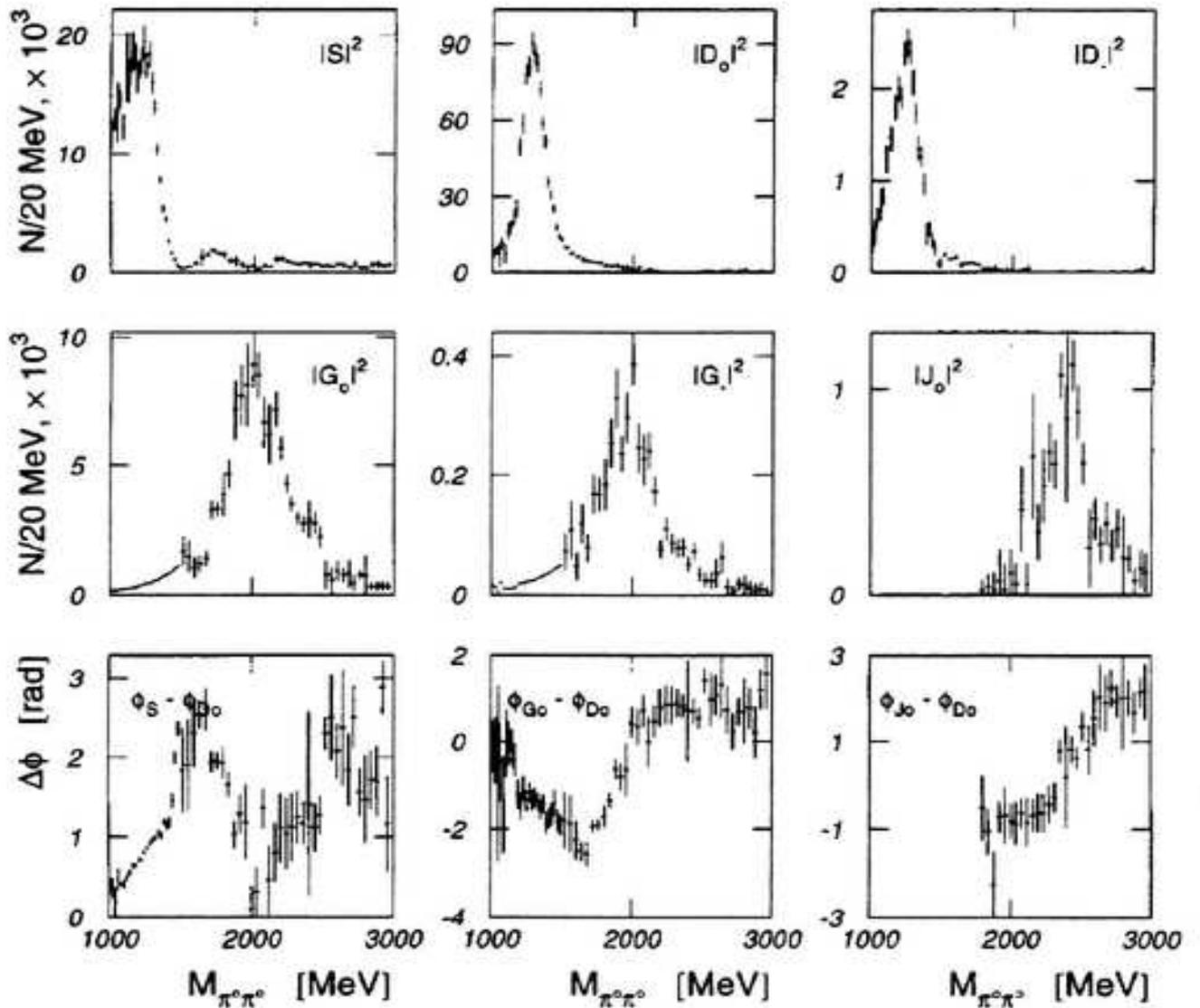


Рис. 3.13: Физическое решение в ПВА реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе 100 ГэВ/с, $-t < 0.2$ (ГэВ/с)² с учетом S , D , G и J -волн с $|m| \leq 1$ в области масс $2\pi^0$ -системы до 3000 МэВ. Фиксированные значения квадратов амплитуд G_0 и G_- показаны сплошными линиями.

В оставшихся восьми решениях $f_4(2050)$ -мезон ясно виден в G_0 и G_- -волнах, в то время как S , D_0 и D_- -волны в этих решениях имеют существенно разное поведение. В частности, во всех, кроме одного, из указанных решений,

наблюдаются статистически значимые структуры в D_0 и D_- -волнах в области масс от 1.8 до 2.5 ГэВ, что находится в явном противоречии с результатами ПВА в области масс до 2.4 ГэВ, полученными в предыдущем разделе. Эти решения также следует отбросить как нефизические. Оставшееся единственное решение, см. Рис.3.13, удовлетворяет всем физическим критериям. Оно характеризуется также быстрой вариацией разности фаз $\phi_{G_0} - \phi_{D_0}$ в области $f_4(2050)$ и $\phi_{J_0} - \phi_{D_0}$ в области $f_6(2510)$, что подтверждает резонансную природу этих состояний, см. Рис. 3.13 внизу в центре и справа. Именно это решение следует интерпретировать как физическое.

3.2.4. Результаты ПВА, скалярные резонансы

Полученное выше физическое решение находится в хорошем согласии с результатами ПВА при импульсе 38 ГэВ/с [14, 17, 96]. При этом, как уже отмечалось ранее, S -волна демонстрирует достаточно сложное поведение в зависимости от массы системы $\pi^0\pi^0$, см. Рис. 3.14. В ее интенсивности видна серия из четырех пиков, разделенных тремя достаточно острыми провалами (дипами) при массах 1000, 1500 и 2000 МэВ. Первые два дипа уже наблюдались ранее при импульсе 38 ГэВ/с. При этом первый дип был отождествлен с $f_0(980)$ -мезоном, а второй — со скалярным мезоном $f_0(1500)$, подробнее см. [11, 14]. Дип же при массе 2000 МэВ в данных ПВА ранее не наблюдался из-за низкой эффективности регистрации $\pi^0\pi^0$ систем в этой области масс при импульсе 38 ГэВ/с. В данных при 100 ГэВ/с эффективность в области больших масс намного больше, поэтому в этих данных дип при 2000 МэВ с последующим широким пиком уже хорошо проявляются. Этот дип естественно отождествить со скалярным резонансом с массой ~ 2000 МэВ подобно тому, как это ранее было сделано в отношении $f_0(980)$ - и $f_0(1500)$ -мезонов. Быстрая вариация разности фаз $\phi_S - \phi_{D_0}$, см. Рис. 3.13 (внизу слева) как в области $f_0(1500)$, так и в области ~ 2000 МэВ, подтверждает резонансную природу этих состояний. Последнее, забегая вперед, мы в дальнейшем будем называть $f_0(2010)$ -мезоном.

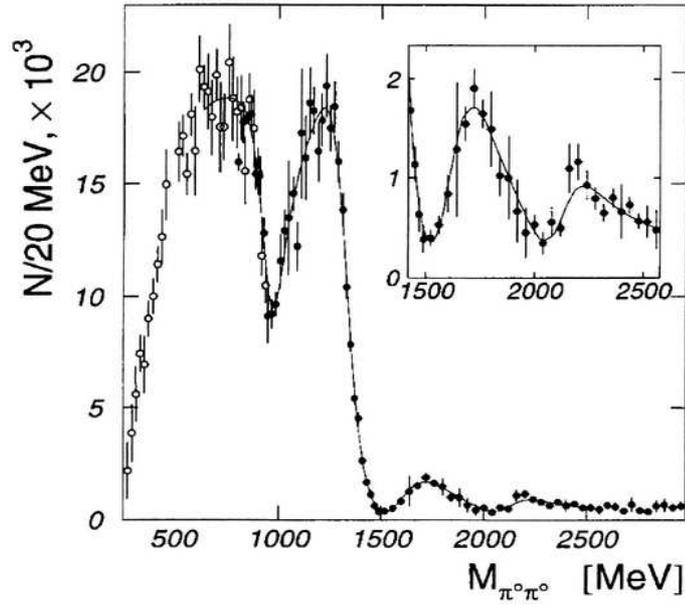


Рис. 3.14: Интенсивность S -волны в физическом решении ПВА реакции $\pi^-p \rightarrow 2\pi^0n$ при импульсе 100 ГэВ/с и $-t < 0.2$ (ГэВ/с)² показана черными точками. Открытыми точками при массе меньше 1000 МэВ показана соответствующим образом нормированная интенсивность S -волны в физическом решении при импульсе 38 ГэВ/с, см. Рис. 3.7. Сплошная линия показывает фит спектра скалярными резонансами $f_0(980)$, $f_0(1300)$, $f_0(1500)$ и $f_0(2010)$, подробности см. в основном тексте.

Для оценки параметров скалярных резонансов и сечений их рождения в реакции (3.1) при импульсе 100 ГэВ/с квадрат модуля S -волны, Рис.3.14, был профитирован квадратом суммарной амплитуды $A(M_{\pi\pi})$, включающей некий гладкий нерезонансный фона и ряд резонансов, для описания которых использовались релятивистские формулы Брейта-Вигнера $B(M_{\pi\pi})$:

$$|A(M_{\pi\pi})|^2 = |G(M_{\pi\pi}) + \sum_{n=1}^{N_{res}} a_n e^{i\theta_n} B(M_{\pi\pi})|^2. \quad (3.15)$$

При этом параметризация фона была выбрана в виде

$$G(M_{\pi\pi}) = (M_{\pi\pi} - 2m_{\pi^0})^\alpha e^{-\beta M_{\pi\pi} - \gamma M_{\pi\pi}^2}, \quad (3.16)$$

где α , β и γ - фитируемые параметры фона, а для функций Брейта-Вигнера мы использовали параметризацию из работы [99]:

$$B(M_{\pi\pi}) = \frac{M_{\pi\pi}}{\sqrt{q}} \sqrt{2l+1} \frac{M_R \Gamma}{M_R^2 - M_{\pi\pi}^2 - iM_R \Gamma}, \quad (3.17)$$

$$\Gamma = \Gamma_R \left(\frac{q}{q_R}\right)^{2l+1} \frac{D_l(q_R r)}{D_l(qr)}, \quad (3.18)$$

где q - это импульс π^0 -мезона в системе покоя $\pi^0\pi^0$, l , M_R и Γ_R - спин, масса и ширина резонанса R , соответственно, q_R - импульс π^0 -мезона при $M_{\pi\pi} = M_R$, r - радиус взаимодействия, который был положен равным 1 Фм (результаты фитирования очень слабо зависят от этой величины), а $D_l(x)$ есть барьерный фактор Блатта-Вайскопфа [100]. При этом следует отметить, что при фитировании интенсивности S -волны в зависимости от массы $M_{\pi\pi}$ функция (3.15) была свернута с гауссианом, учитывающим экспериментальное разрешение установки по массе $M_{\pi\pi}$, которое было предварительно определено методом Монте-Карло:

$$|S(M_{\pi\pi})|^2 = \int dM C e^{-\frac{(M-M_{\pi\pi})^2}{2\sigma^2(M)}} |A(M)|^2, \quad (3.19)$$

где C - это нормировочная константа, а $\sigma(M) = 9 \text{ МэВ} + 0.021 \cdot M_{\pi\pi} [\text{МэВ}]$. Свертка (3.19) проводилась численно.

При анализе спектра на Рис.3.14 было замечено, что учитывать только указанные выше скалярные резонансы ($f_0(980)$, $f_0(1500)$ и $f_0(2010)$) не достаточно для удовлетворительного описания всего спектра. Качество фитирования спектра существенно улучшается, особенно в области масс $\sim 1300 \text{ МэВ}$, если ввести еще резонансное состояние $f_0(1300)$ ². Полученные в результате значения параметров резонансов приведены ниже, ошибки статистические:

$$M(f_0(980)) = 960 \pm 10 \text{ MeV}, \quad \Gamma(f_0(980)) = 70 \pm 20 \text{ MeV}, \quad (3.20)$$

$$M(f_0(1300)) = 1315 \pm 30 \text{ MeV}, \quad \Gamma(f_0(1300)) = 190 \pm 50 \text{ MeV}, \quad (3.21)$$

$$M(f_0(1500)) = 1580 \pm 80 \text{ MeV}, \quad \Gamma(f_0(1500)) = 280 \pm 100 \text{ MeV}. \quad (3.22)$$

Систематические ошибки здесь заведомо меньше статистических, см. [11].

Что касается параметров резонанса $f_0(2010)$, то они были получены равными:

$$M(f_0(2010)) = 2010 \pm 60 \text{ MeV}, \quad \Gamma(f_0(2010)) = 240 \pm 100 \text{ MeV}, \quad (3.23)$$

где приведенные ошибки включают как статистические, так и систематические.

²В дальнейшем, см. PDG'2008 [183], это состояние получило название $f_0(1370)$

Сечения образования перечисленных резонансов пропорциональны числу событий под соответствующими кривыми Брейта-Вигнера на Рис. 3.14. Оценка сечений была получена посредством нормировки числа этих событий на известное сечение рождения $f_2(1270)$ в реакции (3.1):

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_0(980)n) \times BR(f_0(980) \rightarrow 2\pi^0) = 5.4 \pm 1.2 \text{ nb}, \quad (3.24)$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_0(1300)n) \times BR(f_0(1300) \rightarrow 2\pi^0) = 70 \pm 15 \text{ nb}, \quad (3.25)$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_0(1500)n) \times BR(f_0(1500) \rightarrow 2\pi^0) = 12 \pm 3 \text{ nb}, \quad (3.26)$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_0(2010)n) \times BR(f_0(2010) \rightarrow 2\pi^0) = 3 \pm 1 \text{ nb}. \quad (3.27)$$

Детали процедуры нормировки сечений см. в следующем подразделе.

3.2.5. Резонансы с высшими спинами

Чтобы определить параметры резонансов с высшими спинами и сечения их рождения в реакции (3.1) интенсивности D , G и J -волн и их относительные фазы были профитированы суммами с соответствующими функциями Брейта-Вигнера и фонами.

Квадрат модуля D_0 -волны хорошо фитируется резонансом Брейта-Вигнера для спина 2 с массой и шириной равными:

$$M(f_2(1270)) = 1283 \pm 5 \text{ MeV}, \quad \Gamma(f_2(1270)) = 171 \pm 10 \text{ MeV}, \quad (3.28)$$

а также константой в качестве фона. Параметры (3.28) находятся в хорошем согласии с данными таблицы частиц [101]. Квадрат D_- -волны не вполне удовлетворительно фитируется функцией Брейта-Вигнера, что может быть объяснено погрешностями в определении эффективности регистрации при малых массах системы $\pi^0\pi^0$.

Параметры $f_4(2050)$ были получены посредством совместного фита интенсивностей D_0 , G_0 и G_- -волн и относительной фазы $\phi_{G_0} - \phi_{D_0}$, см. Рис.3.15. При этом G_0 и G_- -волны описывались функциями Брейта-Вигнера для спина 4 и комплексными константами фона. Параметры резонанса $f_2(1270)$ были

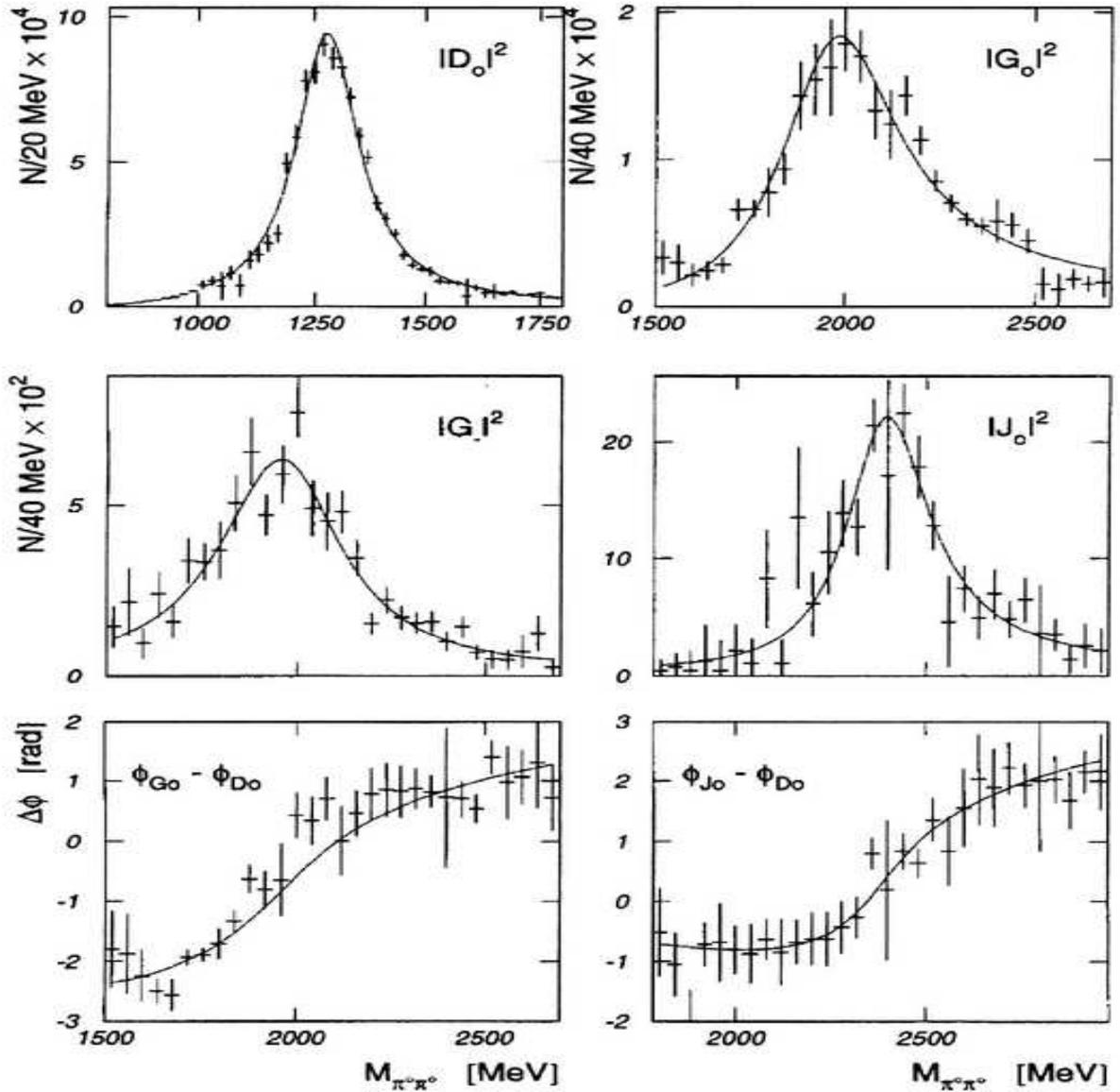


Рис. 3.15: Интенсивности и разности фаз D , G J -волн в ПВА реакции $\pi^- p \rightarrow 2\pi^0 n$ при импульсе $100 \text{ ГэВ}/c$ и $-t < 0.2 (\text{ГэВ}/c)^2$. Кривыми показаны результаты фита функциями Брейта-Вигнера и фона, детали см. в тексте.

фиксированы равными их значениям в таблице частиц [101]. В результате с учетом разрешения по массе системы $\pi^0\pi^0$ были получены следующие значения параметров резонанса $f_4(2050)$:

$$M(f_4(2050)) = 1998 \pm 15 \text{ MeV}, \quad \Gamma(f_4(2050)) = 395 \pm 40 \text{ MeV}. \quad (3.29)$$

Параметры $f_6(2510)$ были определены аналогично из одновременного фита квадратов модулей D_0 и J_0 -волн и их относительной фазы $\phi_{J_0} - \phi_{D_0}$, см. Рис. 3.15:

$$M(f_6(2510)) = 2420 \pm 30 \text{ MeV}, \quad \Gamma(f_6(2510)) = 270 \pm 60 \text{ MeV}. \quad (3.30)$$

При этом амплитуда D_0 -волны параметризовалась в виде комплексной линейной функции от массы системы $\pi^0\pi^0$, т.к. ее описание в виде функции Брейта-Вигнера в этой области масс дает неудовлетворительный результат при фите. Ширина резонанса в (3.30) приведена с учетом аппаратурного разрешения по массе.

Сечения рождения $f_4(2050)$ - и $f_6(2510)$ -резонансов в реакции (3.1) были определены путем нормировки числа событий в $f_4(2050)$ - и $f_6(2510)$ -пиках на число событий в $f_2(1270)$ -пике, см. Рис. 3.15, и сечение образования этого резонанса при импульсе 100 ГэВ/с. Последнее было получено посредством экстраполяции сечения образования $f_2(1270)$ -мезона в реакции (3.1), измеренного при импульсе 38 ГэВ/с [98], в соответствии с результатами работы [103]:

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_2 n) \times BR(f_2 \rightarrow 2\pi^0) = (2.61 \pm 0.20) \mu b \times (p_{lab}/38 \text{ GeV}/c)^{-2.15 \pm 0.05},$$

где в нашем случае $p_{lab} = 100$ ГэВ/с, подробнее см. [11].

В результате сечения рождения указанных выше резонансов в соответствующих волнах получены равными:

$$\sigma_{G_0}(\pi^- p \rightarrow f_4(2050)n) \times BR(f_4(2050) \rightarrow 2\pi^0) = 74.8 \pm 7.2 \text{ nb}, \quad (3.31)$$

$$\sigma_{G_{\pm}}(\pi^- p \rightarrow f_4(2050)n) \times BR(f_4(2050) \rightarrow 2\pi^0) = 2.5 \pm 0.3 \text{ nb}, \quad (3.32)$$

$$\sigma_{J_0}(\pi^- p \rightarrow f_6(2510)n) \times BR(f_6(2510) \rightarrow 2\pi^0) = 9.9 \pm 1.4 \text{ nb}. \quad (3.33)$$

Наконец, полезно привести здесь еще и полное сечение рождения $f_4(2050)$ мезона в G_0 , G_- и G_+ -волнах, основанное на соотношении $|G_-| = |G_+|$:

$$\sigma_{tot}(\pi^- p \rightarrow f_4(2050)n) \times BR(f_4(2050) \rightarrow 2\pi^0) = 79.8 \pm 7.8 \text{ nb}, \quad (3.34)$$

а также оценку сверху на сечение $f_6(2510)$ в J_{\pm} -волнах (на 95% уровне достоверности) по отношению к J_0 -волне:

$$\frac{\sigma_{J_{\pm}}(\pi^- p \rightarrow f_6(2510)n)}{\sigma_{J_0}(\pi^- p \rightarrow f_6(2510)n)} < \frac{1}{10}. \quad (3.35)$$

Этот результат интересно сравнить с предсказаниями модели Окса-Вагнера [94], согласно которой

$$\frac{|A_-^l|^2}{|A_0^l|^2} = \frac{C}{M_{\pi\pi}^2} l(l+1), \quad (3.36)$$

где C - некая константа, которая в нашем случае может быть определена из отношения сечений образования $f_4(2050)$ в G_- и G_0 -волнах, см. (3.32) и (3.31), откуда с учетом (3.30) мы сразу получаем это отношение для $f_6(2510)$ равным 0.05, что находится в согласии с оценкой (3.35). Таким образом, представленные данные по сечениям образования мезонов с высшими спинами при импульсе 100 ГэВ/с являются самосогласованными.

3.3. Краткие итоги

Последовательное применение описанной в Главе 2 методики для парциально-волнового анализа событий реакции (3.1) при импульсах 38 и 100 ГэВ/с позволило решить проблему неоднозначностей ПВА в терминах парциальных амплитуд, найти глобальные решения в области масс системы $\pi^0\pi^0$ до 3 ГэВ и идентифицировать физическое решение. При этом в интенсивности S -волны была выделена серия скалярных резонансов, проявляющихся в деструктивной интерференции с нерезонансным фоном, а в высших волнах идентифицированы $f_2(1270)$ -, $f_4(2050)$ - и $f_6(2510)$ - мезоны, измерены сечения их образования в различных парциальных волнах. Проведено сравнение полученных результатов с теоретическими моделями.

Глава 4. Парциально-волновой анализ реакции

$$\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$$

Интерес к системе $\eta \pi^0$, образующейся в реакции

$$\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n, \quad (4.1)$$

связан с возможностью наблюдения в ней $\eta \pi^0$ -резонансов с экзотическими квантовыми числами $I^G J^{PC} = 1^- 1^{-+}$. Интенсивное изучение $\eta \pi^0$ -системы началось в 1988 г. с работы коллаборации ГАМС [76], где сообщалось о первом наблюдении экзотического состояния $M(1405)$. Хотя за прошедшее с тех пор время были опубликованы результаты целого ряда экспериментов, включая данные КЕК, E852, ВЕС и СВ коллабораций, равно как и новые данные самой коллаборации ГАМС, полной ясности с экзотическими резонансами в системе $\eta \pi^0$ пока не достигнуто. Ниже мы в хронологическом порядке подробно остановимся на экспериментальных данных коллаборации ГАМС по реакции (4.1) и их интерпретации, следуя работам [8, 18, 19, 20, 23].

4.1. Первые результаты ПВА при импульсе 100 ГэВ/с

Пионерская работа [76] основана на данных эксперимента NA12, полученных в 1984 г. на π^- пучке SPS при импульсе 100 ГэВ/с. При этом использовались стандартные программы реконструкции, отбора и кинематического анализа событий, подробности см. в работе [77]. В результате был выделен ансамбль $\eta \pi^0$ -систем, образующихся в реакции (4.1). Этот ансамбль был использован для проведения масс-независимого ПВА в области масс $\eta \pi^0$ -систем до 2.2 ГэВ, в котором учитывались только S , P_0 , P_- , P_+ , D_0 , D_- и D_+ -волны. Фит угловых распределений в каждом массовом бине проводился методом Грайера [82]. Вначале определялись моменты сферических гармо-

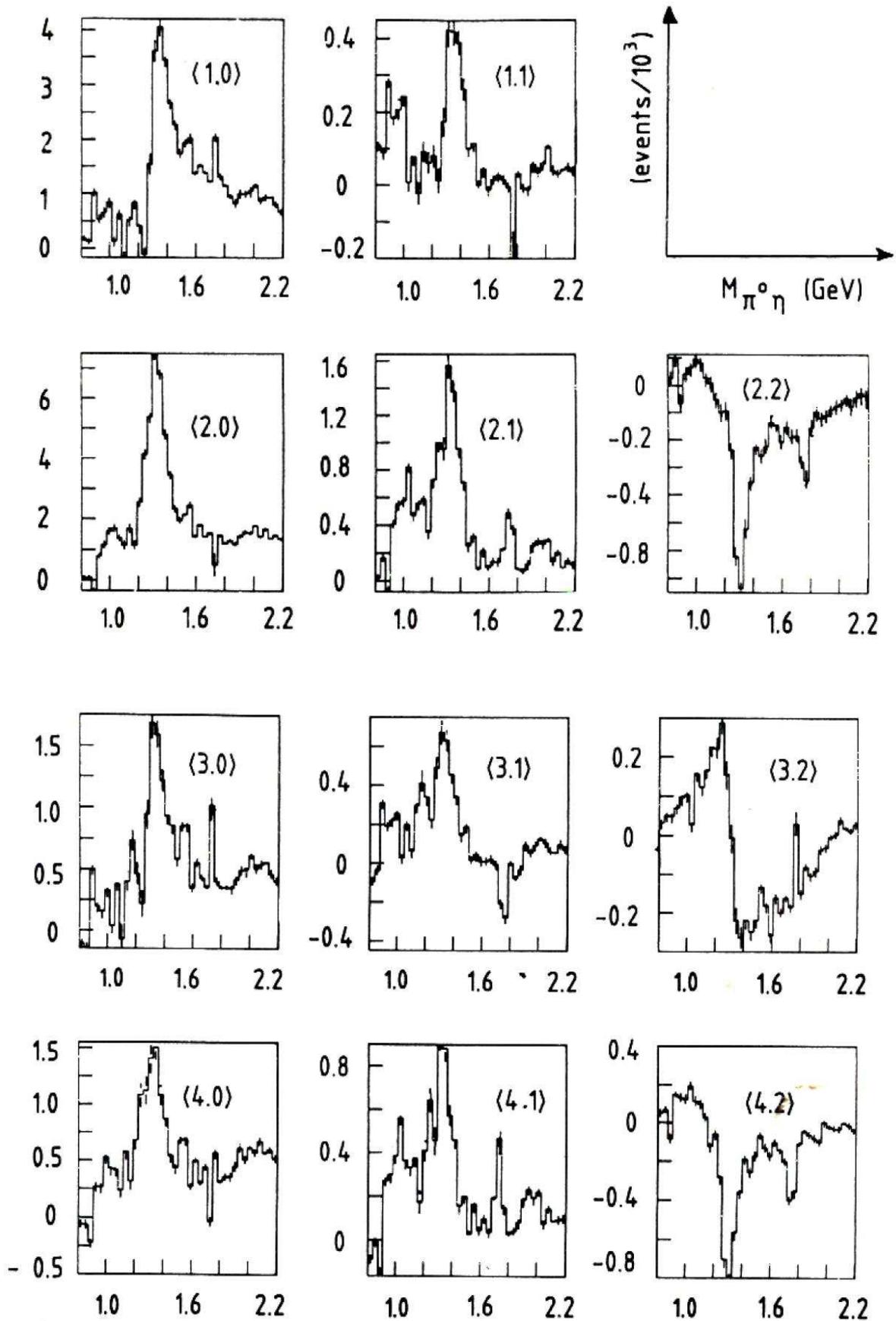


Рис. 4.1: Моменты сферических гармоник t_{lm} , полученные при проведении ПВА реакции (4.1) при импульсе 100 ГэВ/с по данным работы [76].

ник t_{lm} ($l \leq 2$, $m \leq 2$), см. (2.6), а затем восстанавливались парциальные волны путем решения системы квадратичных уравнений (2.10). Полученные моменты t_{lm} приведены на Рис. 4.1, см. [76]. Все моменты с $l > 2$ и $m > 2$ в пределах статистических ошибок оказались совместимы с нулем. Проблема неоднозначности определения парциальных волн была решена для случая только S , P_0 и D_0 -волн. В результате в каждом массовом бине было получено два решения для S , P_0 и D_0 -волн с неизменными значениями P_- , P_+ , D_- и D_+ -волн. Оба решения практически совпадали с точностью до ошибок измерения. Одно из решений приведено на Рис.4.2. Как видно из рисунка в обоих волнах, P_+ и D_- , не проявляется каких либо структур.

В интенсивностях же P_0 , D_0 и D_+ -амплитуд ясно проявляются резонансные структуры, которые подтверждаются вариацией разностей фаз: $\phi_{P_0} - \phi_{D_0}$ и $\phi_{P_+} - \phi_{D_+}$. Указанные интенсивности были профитированы функциями Брейта-Вигнера с соответствующим квадратичным фоном. Результаты приведены в Табл.4.1. Таким образом был сделан вывод о наблюдении в реакции (4.1) наряду с известным мезоном $a_2(1320)$ -резонанса $M(1405)$, который имеет квантовые числа $I^G J^{PC} = 1^- 1^{-+}$, запрещенные для $q\bar{q}$ состояний.

Таблица 4.1: Параметры резонансов в ПВА реакции (4.1) при импульсе 100 ГэВ/с по данным эксперимента NA12, детали см. в [76].

Состояние	Волна	Масса, МэВ	Ширина, МэВ	$\sigma Br(\eta\pi^0)$, нб
$M(1405)$	P_0	1406 ± 20	180 ± 20	9 ± 2
$a_2(1320)$	D_0	1308 ± 30	163 ± 30	40 ± 10
$a_2(1320)$	D_+	1301 ± 20	114 ± 20	17 ± 6

Это первое наблюдение мезонного резонанса с экзотическими квантовыми числами, которые могут реализоваться, например, в состояниях $q\bar{q}g$ и/или в четырехкварковых состояниях. Что касается t -распределения в реакции (4.1), то в области масс 1.2-1.6 ГэВ оно имеет форму характерную для до-

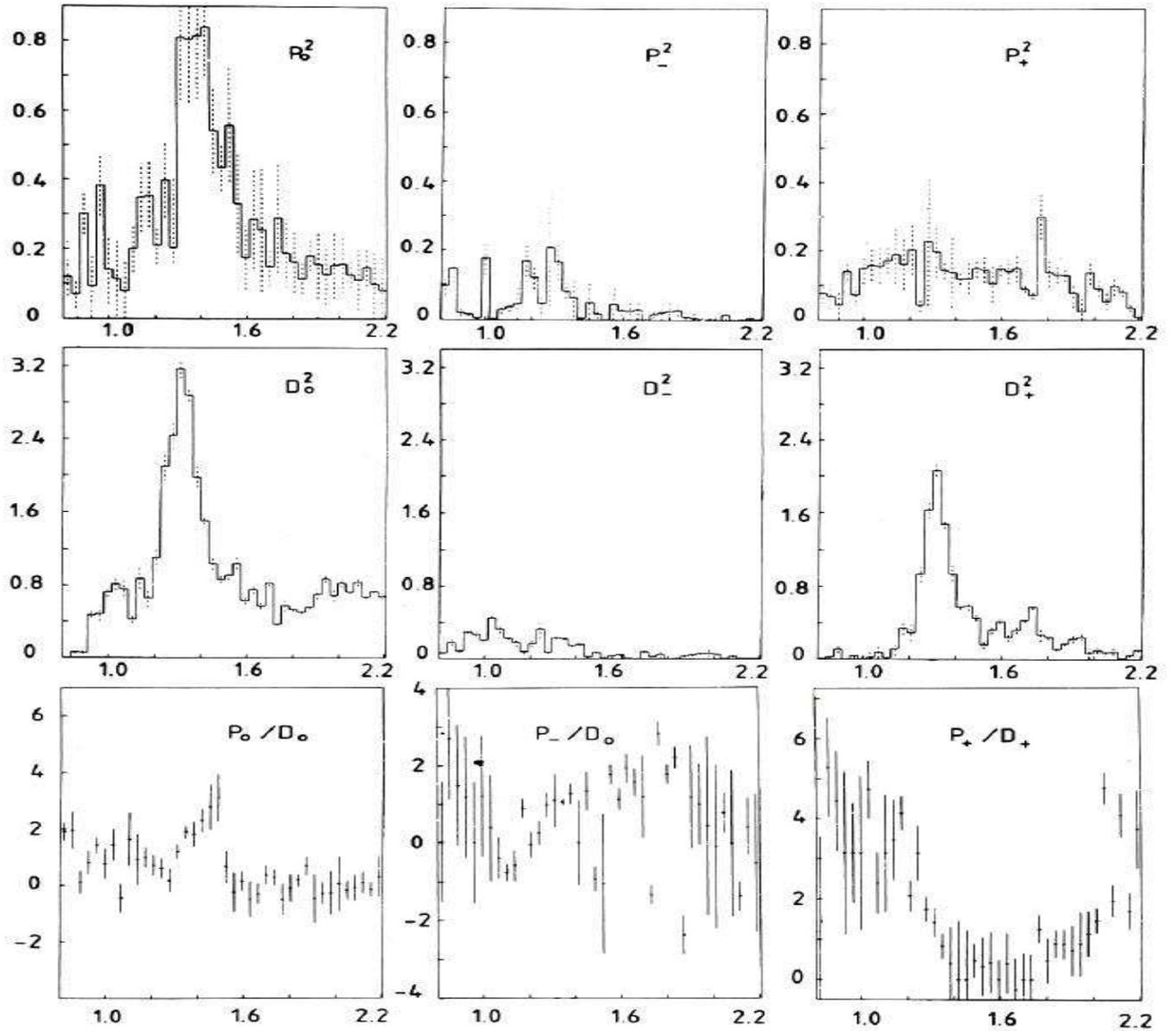


Рис. 4.2: Интенсивности (две верхних строки) и относительные фазы (нижняя строка) P_0 , P_- , P_+ , D_0 , D_- и D_+ -волн в ПВА реакции (4.1) при импульсе 100 ГэВ/с по данным эксперимента NA12 [76].

минирующего ρ -обмена при образовании $a_2(1320)$ -мезона в реакции (4.1), см. [76, 77, 84]. Безусловно, работа [76] вызвала большой интерес и стимулировала как теоретические, так и дальнейшие экспериментальные исследования экзотических состояний в мезонной спектроскопии. Достаточно сказать, что на апрель 2014 г. на эту работу имеется 147 ссылок.

Вместе с тем сообщение об открытии экзотического состояния $M(1405)$ научным сообществом было воспринято неоднозначно. Спектроскопия экзотических мезонных состояний в целом далеко выходит за рамки настоящей

работы, и поэтому заинтересованного в этой тематике читателя мы отсылаем к оригинальным обзорам, см. например, [113, 114, 115, 116]. Здесь же мы лишь кратко отметим основные критические комментарии в связи с результатами работы [76].

Во-первых, было практически сразу замечено, что результаты [76] находятся в некоем противоречии с более ранней работой [84], и в этой связи было предложено проанализировать данные эксперимента NA12, использованные в работе [76], более аккуратно, см. [115].

Во-вторых, доминирующее рождение $a_2(1320)$ -мезона в волне D_0 , см. вторую строку Рис. 4.2, противоречит доминирующему ρ -обмену в области масс 1.2-1.6 ГэВ (см. выше), поскольку ρ -обмен является обменом с натуральной спин-четностью и, следовательно, доминирование ρ -обмена должно приводить к доминированию рождения $a_2(1320)$ -мезона в D_+ , а не D_0 -волне, как это имеет место на Рис.4.2, т.е. данные работы [76] являются внутренне несамосогласованными. Аналогичное утверждение делается также и в отношении доминирования P_0 и P_+ -волн, т.е. механизма рождения $M(1405)$ мезона, подробнее см.[114, 115]. При этом в работе [114] уже прямо указывается на необходимость провести ревизию ПВА реакции (4.1) при импульсе 100 ГэВ/с.

Наконец, как уже было подробно показано в главе 2, в ПВА реакции (4.1) при учете S , P_0 , P_- , P_+ , D_0 , D_- и D_+ -волн существует 8 нетривиальных решения, а не два ошибочно рассмотренных в работе [76].

Учитывая все выше изложенное, было принято решение переанализировать данные эксперимента NA12, положенные в основу работы [76]. К изложению этих результатов мы переходим ниже.

4.2. Анализ D -волны в реакции $\pi^- p \rightarrow a_2^0(1320)n$ при 100 ГэВ/с

Результаты детального исследования точности ПВА реакции (4.1) методом Монте-Карло были изложены выше в главе 2.3 применительно к данным эксперимента NA12, проанализированным в работе [76]. Здесь же была вы-

яснена и основная причина полученного доминирования D_0 -волны в реакции (4.1), см. вторую строку на Рис. 4.2, как следствие использования метода Грайера [82] вне области его корректной применимости. В данной главе мы воспользуемся развитой в главе 2.3 методикой для анализа угловых распределений экспериментальных событий (4.1), следуя работам [8, 18].

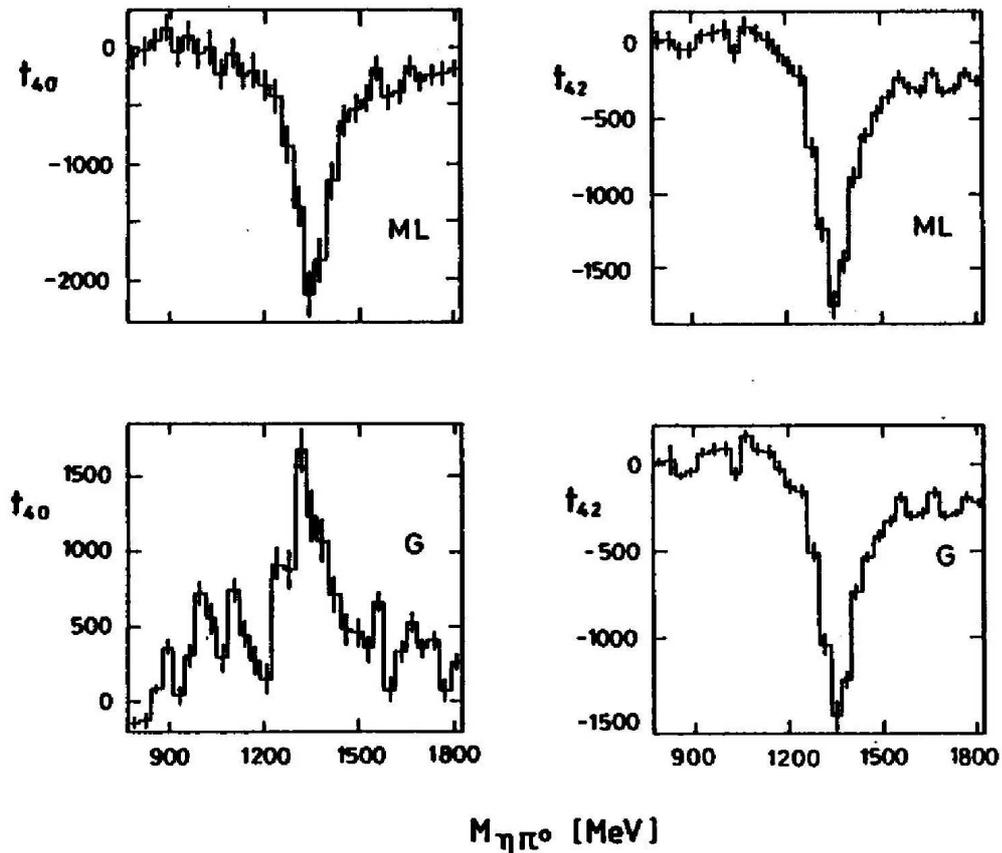


Рис. 4.3: Моменты сферических гармоник t_{40} и t_{42} , вычисленные методом максимума правдоподобия (ML, сверху) и методом Грайера (G, внизу). Погрешности определены программой MINUIT [79], $\varepsilon_{min} = 0.02$, детали анализа см. в главе 2.3.

Вначале, чтобы не усложнять задачу анализа неоднозначностью решений ПВА, угловые распределения из [76] в реакции (4.1) были проанализированы в терминах моментов t_{lm} сферических гармоник, см. (2.6) и (2.7), одновременно методом максимума правдоподобия (2.24) и методом Грайера (2.27). Результаты анализа для моментов t_{40} и t_{42} приведены на Рис. 4.3. Как видно, распределения для момента t_{40} , полученные Методом Максимума Правдоподобия (ММП) и Грайера находятся в противоречии. При этом

значения моментов t_{40} и t_{42} при использовании метода Грайера совпадают с таковыми, приведенными в работе [76].

Вместе с тем, если подобно тому, как это было сделано в главе 2.3, ввести отбор экспериментальных событий по эффективности их регистрации $\varepsilon(\Omega_i) > \varepsilon_{min}$ ($\varepsilon_{min} = 0.02, 0.075, 0.15$), то при увеличении порога регистрации ε_{min} распределение момента t_{40} , полученное методом Грайера, качественно меняется, см. Рис.4.4.

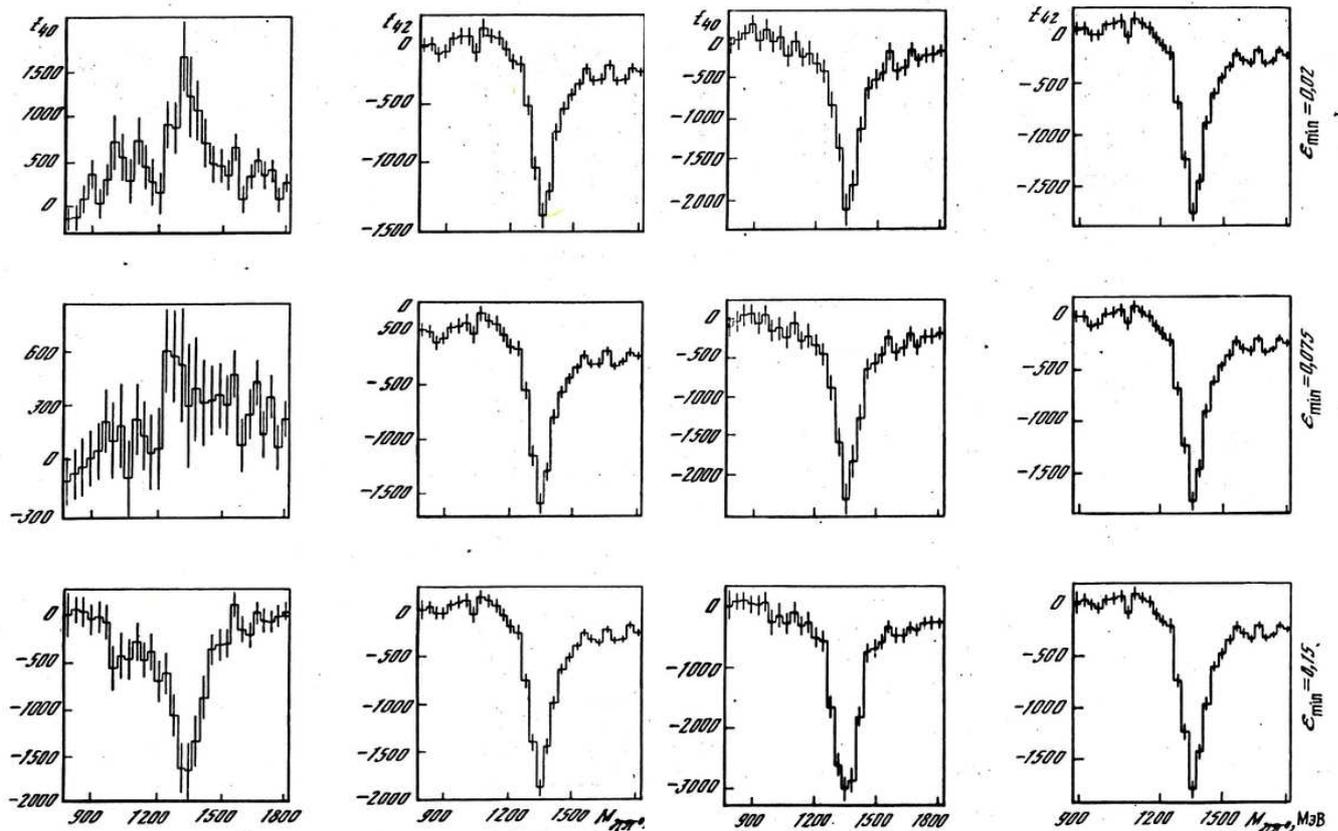


Рис. 4.4: Моменты t_{40} и t_{42} , вычисленные методом Грайера (первые две колонки слева) и вычисленные методом максимума правдоподобия (две колонки справа), при трех значениях порога по эффективности (сверху вниз): $\varepsilon_{min} = 0.02, 0.075, 0.15$ (показаны справа на рисунке вдоль оси ординат).

Как видно из этого рисунка, при переходе через значение $\varepsilon_{min} = 0.075$ распределение момента t_{40} меняет знак, и при $\varepsilon_{min} = 0.15$ (число событий при этом отборе уменьшается менее, чем на 3%) оно уже достаточно хорошо согласуется с распределением, полученным методом максимума правдоподобия, см. нижний ряд на Рис.4.4, подробнее в работе [8].

Таким образом, противоречие между результатами анализа угловых

распределений методом максимума правдоподобия и методом Грайера связано с использованием в [76, 77] метода Грайера вне области его применимости, т.е. при слишком малом значении ε_{min} — критического параметра для этого метода, см. [61]. Следствием произошедшей в результате инверсии знака момента t_{40} является, в частности, неверный вывод в [76, 77] о большом вкладе D_0 -волны в области $a_2(1320)$ -мезона, см. выражение для момента t_{40} в системе уравнений (2.10). Более того, полученные теперь корректные распределения моментов t_{40} и t_{42} свидетельствуют о доминировании D_+ -волны в механизме рождения $a_2(1320)$ -мезона в реакции (4.1), что хорошо согласуется с предсказаниями, высказанными в работах [114, 115] в связи обсуждением наблюдения $M(1405)$ -состояния.

Этот качественный вывод о доминировании D_+ -волны подтверждается последовательным парциально-волновым анализом угловых распределений событий в области масс $a_2(1320)$ -мезона с использованием классического ММП в терминах парциальных амплитуд. Следуя работе [18], мы представим здесь вначале результаты анализа $\eta\pi^0$ -системы, образующейся в реакции (4.1) при импульсе 100 ГэВ/с, в области $a_2(1320)$ -пика, сосредоточив внимание на интенсивностях D -волн, а позднее подробно рассмотрим и другие области масс $\eta\pi^0$ -системы.

Распределения отобранных для анализа событий по $\cos\theta_{GJ}$ и ϕ_{TY} из области масс $a_2(1320)$ -мезона ($1225 < M_{\eta\pi^0} < 1400$ МэВ) представлены на Рис. 4.5. Здесь же приведены распределения взвешенных событий с весом $1/\varepsilon(\Omega_i)$, где $\varepsilon(\Omega_i)$ — эффективность регистрации i -го события. Результаты ПВА методом максимума правдоподобия устойчивы к отбору событий с эффективностью регистрации выше пороговой величины ε_{min} (варьируемый параметр процедуры, детали см. в [18]). На Рис. 4.5 (вверху) показаны фитирующие кривые, полученные при $\varepsilon_{min} = 0.008$ и 0.096 . Ниже даны проекции восстановленного углового распределения событий реакции и распределения взвешенных событий. Как видно из этого рисунка, распределение взвешенных событий хорошо воспроизводит восстановленное распределение в обла-

стях, где эффективность достаточно велика [15].

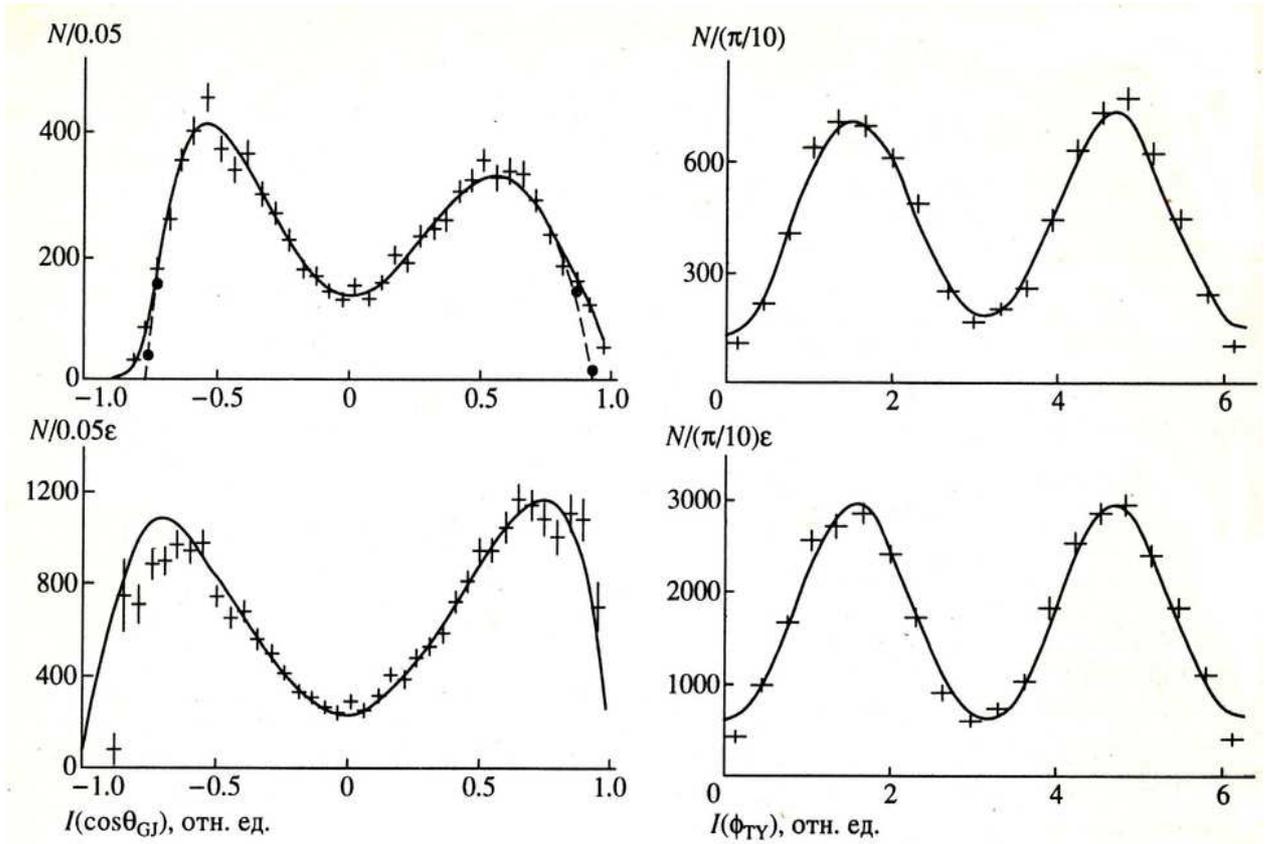


Рис. 4.5: Проекция угловых распределений событий реакции (4.1) на оси $\cos\theta_{GJ}$ и ϕ_{TU} , измеренные в области $a_2^0(1320)$ -пика при $\varepsilon_{min} = 0.008$ (+) и 0.096 (•) (верхняя пара рисунков). Сплошные кривые - результат фита методом максимума правдоподобия при $\varepsilon_{min} = 0.008$. Небольшое изменение при переходе к $\varepsilon_{min} = 0.096$ показано штриховой линией. Вторая пара рисунков внизу - распределения взвешенных событий (вес $1/\varepsilon_i$) при $\varepsilon_{min} = 0.008$, кривые линии - восстановленные ММП угловые распределения (при $\varepsilon_{min} = 0.096$ они сливаются с приведенными).

Квадраты всех амплитуд реакции (4.1), полученные в результате фита углового распределения событий при $\varepsilon_{min} = 0.008$, представлены на Рис. 4.6 (левые точки — первое из найденных решений). В пределах статистических ошибок они совпадают с амплитудами при $\varepsilon_{min} = 0.096$ (на рисунке не показаны). Квадраты амплитуд семи других возможных решений, возникающих вследствие неоднозначности восстановления амплитуд по угловому распределению событий, представлены правее на том же рисунке (процедура их нахождения описана в [9, 12], см. главу 2). Как видно из рисунка, хотя вариация некоторых амплитуд при переходе от одного решения к другому (например, S_- , P_o - и D_o -волн) значительна, квадрат модуля D_+ -волны практически

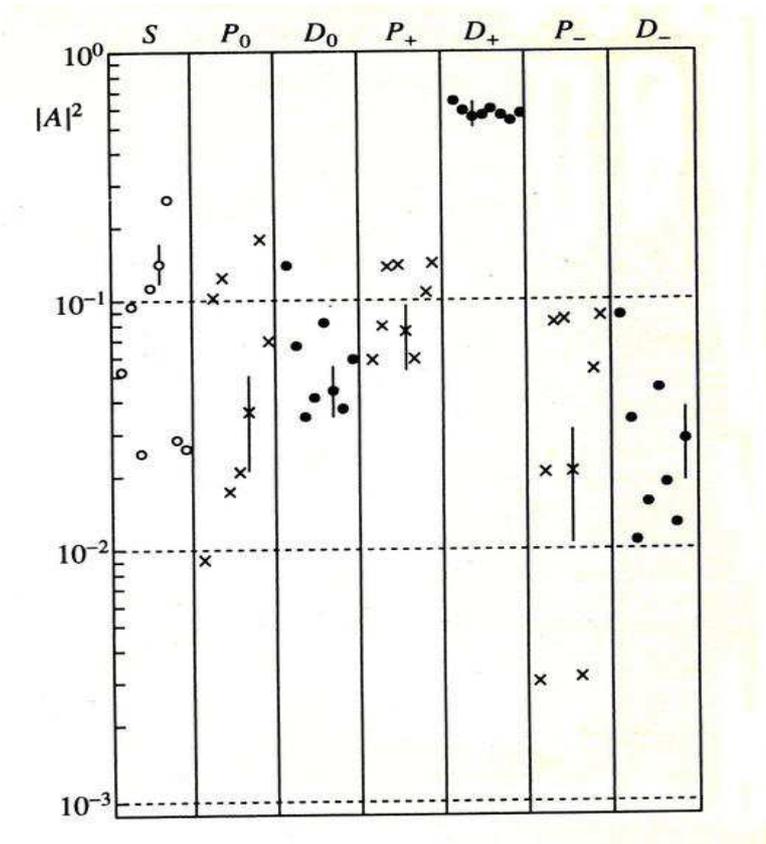


Рис. 4.6: Квадраты модулей S , P и D амплитуд, полученные методом максимума правдоподобия (8 решений). Нормировка: $N\sqrt{4\pi}t_{00} = 1$, $\varepsilon_{th} = 0.008$; при $\varepsilon_{th} = 0.096$ результаты те же, на рисунке не показаны.

постоянен в пределах небольших статистических ошибок. Во всех восьми решениях D_+ -волна доминирует, и имеет место соотношение:

$$|D_0/D_+|^2 < 0.16. \quad (4.2)$$

Еще более жестким оказывается ограничение на интенсивность D_- -волны, см. Рис.4.6, что говорит о подавленности в целом обмена с неестественной спин-четностью в механизме образования $a_2^0(1320)$ -мезона в реакции (4.1) при импульсе 100 ГэВ/с.

Таким образом, в рамках ММП мы получили взаимно-согласованное описание экспериментальных данных реакции (4.1): в области $a_2^0(1320)$ -мезона доминирует D_+ -волна; при этом угловые распределения хорошо описываются, их вид и, в частности, распределение по углу Траймана-Янга также соответствуют доминирующей D_+ -волне. Последнее означает в свою очередь, что обмен в t -канале реакции идет преимущественно с естественной спин-четностью, что и проявляется в измеренном t -распределении реакции, см. [77]. Наблюдаемая асимметрия в распределении событий по $\cos\theta_{GJ}$ является при этом следствием интерференции P_+ - и D_+ -волн. Относительная

фаза этих волн испытывает характерное резонансное изменение (на π) при прохождении через пик $a_2^0(1320)$ -мезона.

Далее, для полноты исследования, парциально-волновой анализ отобранных событий реакции (4.1) был проведен также и методом Грайера, использовавшимся в работах [76, 77]. Фит угловых распределений проводился по-событийно в терминах амплитуд реакции. Процедура фита совпадала с использованной в ММП за исключением функционала минимизации, который был выбран в виде [77, 82]

$$F_{Gr} = - \sum_{i=1}^N w_i \ln \{ I(\Omega_i, \vec{a}) \cdot \varepsilon(\Omega_i) \}, \quad (4.3)$$

где $w_i = 1/\varepsilon(\Omega_i)$ (подробности см. в [8, 15]). Квадраты модулей амплитуд, полученные для восьми нетривиальных решений, представлены на Рис. 4.7 при двух значениях ε_{min} . Как и следовало ожидать, результаты этого анализа при низком пороге, $\varepsilon_{min} = 0.008$, находятся в согласии с данными работ [76, 77], где был, фактически, использован порог $\varepsilon_{min} = 0.01$. Для отношения D_o и D_+ амплитуд при этом вне зависимости от выбранного решения выполняется соотношение:

$$| D_o/D_+ |^2 = 1.3 \pm 0.1, \quad (4.4)$$

сравни с (4.2).

Отношение (4.4) резко противоречит результату (4.2), полученному в рамках ММП. С увеличением ε_{min} до 0.096 (см. Рис. 4.7 справа) определенное методом Грайера значение $|D_o/D_+|^2$ уменьшается в 4÷10 раз (в зависимости от выбранного решения) и приближается к (4.2). Такое изменение указанного отношения, как показано в [15], характерно для доминирующей D_+ -волны.

Что касается теоретической интерпретации полученных результатов, согласно модели полюсов Редже, см., например [104], сечение образования $a_2^0(1320)$ -мезона в зарядовообменной реакции (4.1) определяется ρ - и b -траекториями, соответствующими обменам с естественной и неестественной спин-четностью в t -канале реакции. В рамках этой модели предсказывает-

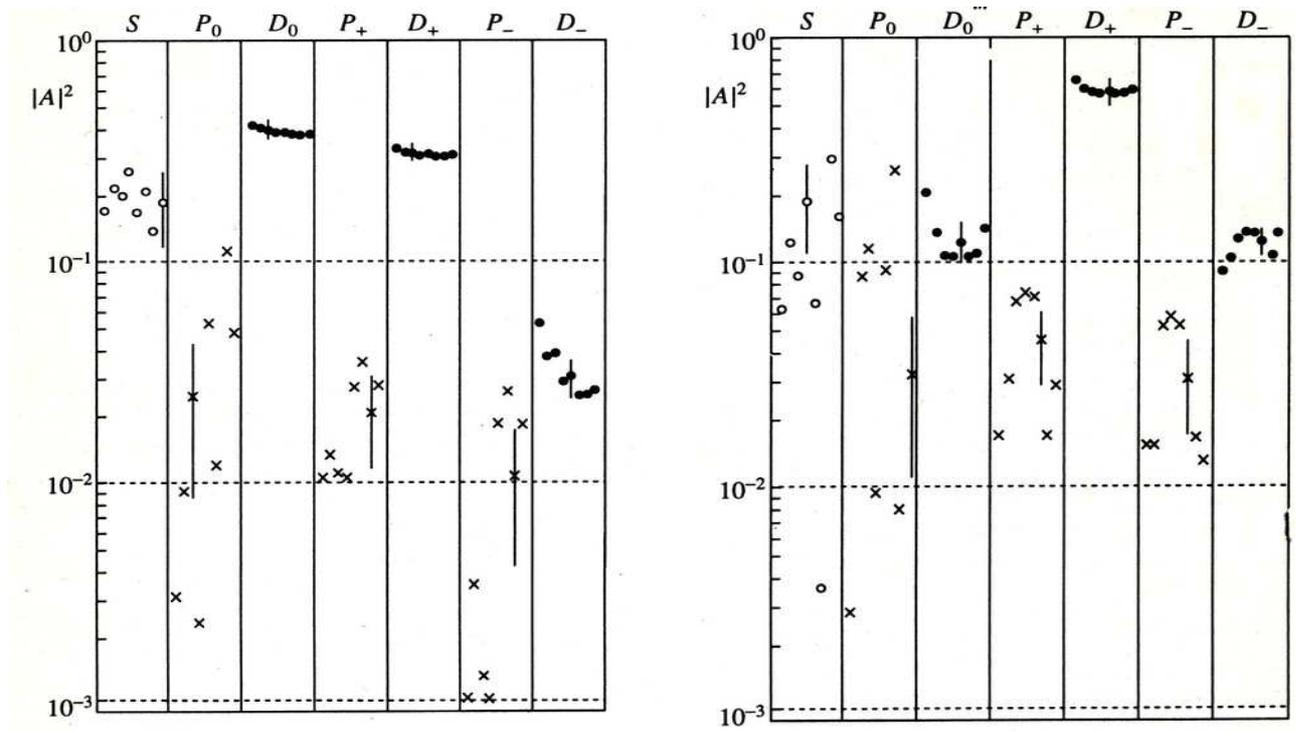


Рис. 4.7: То же что на Рис. 4.6, но получено методом Грайера: слева $\varepsilon_{min} = 0.008$, справа 0.096 .

ся, что зависимость отношения квадратов амплитуд с неестественной и естественной спин-четностью (и следовательно, отношение соответствующих сечений)

$$R = (|D_0|^2 + |D_-|^2) / |D_+|^2 \quad (4.5)$$

в ведущем порядке по импульсу пучка π^- -мезонов p имеет вид $R \sim 1/p$.

На Рис. 4.8 представлено отношение (4.5), полученное на основе данных экспериментов [89, 105]. Прямой показана нормированная на них зависимость $1/p$. Здесь же приведены результаты других экспериментов [77, 81, 84, 106], а также величины отношения (4.5), полученные в работе [18] методом максимума правдоподобия и методом Грайера при $\varepsilon_{min} = 0.008$ и 0.096 . Как видно из рисунка, отношение сечений (4.5), определенное методом Грайера, находится в резком противоречии с предсказаниями модели полюсов Редже. Напротив, результаты, полученные методом максимума правдоподобия, согласуются с этой моделью.

Таким образом, доминантность обмена с естественной спин-четностью (ρ -обмена) в t -канале реакции (4.1), проявляющаяся в полученном выше соот-

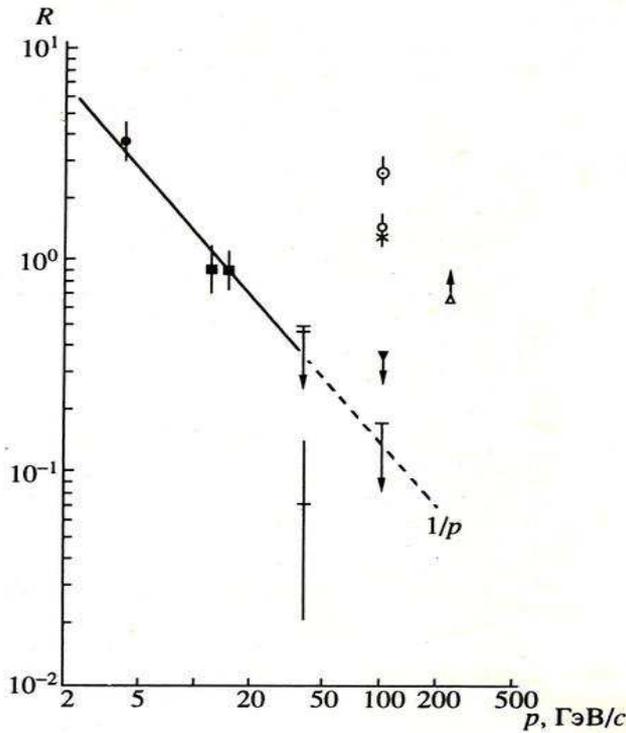


Рис. 4.8: Отношение сечений (4.5) в зависимости от импульса пучка p в реакции (4.1). Экспериментальные данные: [105] (\bullet); [89] (\square); [81] ($+$); [84] (\mp), верхний предел; [77], метод Грайера, расстояние от мишени до calorиметра ГАМС-4000 - 15 м (\circ) и 20 м (\circ); [106] (\perp), нижний предел; настоящая работа: метод Грайера, $\varepsilon_{th} = 0.008$ (\times) и 0.096 (Γ), верхний предел, и метод максимума правдоподобия (Γ), верхний предел. Прямой линией показана зависимость $\sim 1/p$, нормированная на первые три точки слева на рисунке.

ношении (4.2), хорошо согласуется с предсказаниями модели полюсов Редже. Напротив, результаты работ [76, 77], резко противоречат модели Редже, что является еще одним дополнительным, физическим, аргументом для признания результатов [76, 77] некорректными.

4.3. Изучение реакции $\pi^- p \rightarrow \eta \pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с

В предыдущей разделе было показано, что в работах [76, 77] парциально-волновой анализ реакции (4.1) при импульсе 100 ГэВ/с был выполнен некорректно, что поставило под сомнение и основной результат этих работ — наблюдение состояния $M(1405)$ с экзотическими квантовыми числами $I^G J^{PC} = 1^- 1^{--}$. Вместе с тем, как уже отмечалось выше, сама по себе работа [76] явилась серьезным стимулом для продолжения изучения системы $\eta\pi$ в различных экспериментах, в том числе и в экспериментах сотрудничества ГАМС. Однако, учитывая что при импульсе 100 ГэВ/с в эксперименте NA12 статистика $\eta\pi^0$ -систем даже по сумме двух сеансов 1984 г. (на расстояниях 15 м и 20 м от мишени до спектрометра ГАМС-4000) составляет менее 35 тыс. событий, см. [76], было принято решение провести ПВА реакции (4.1) по данным

апрельского сеанса на установке ГАМС-2000 при импульсе 38 ГэВ/с, где было выделено более 140 тыс. практически безфоновых $\eta\pi^0$ -событий. Принимая далее во внимание наличие 8-ми нетривиальных решений в ПВА реакции (4.1) и связанные с этим неизбежные трудности в идентификации одного физического решения, ПВА реакции был проведен последовательно в различных интервалах по массе системы $\eta\pi^0$, начиная с интервалов, где идентификация физического решения из восьми возможных не представляла бы особого труда. К изложению этих результатов мы переходим ниже, следуя работам [19, 20, 21, 22].

4.4. Изучение $\eta\pi^0$ -системы в области масс до 1200 МэВ

Реакция $\pi^- p \rightarrow \eta\pi^0 n$ изучалась в эксперименте на установке ГАМС-2000 при импульсе пионного пучка 38 ГэВ/с. В целом, после всех отборов было зарегистрировано 140 тыс. событий этой реакции, детали см. в работе [22]. Вначале ПВА реакции был проведен в области масс $\eta\pi^0$ системы от порога до 1200 МэВ. Поиск физического решения здесь существенно упрощается, т.к., во-первых, в спектре масс системы $\eta\pi^0$ доминирует пик от $a_0(980)$ -мезона, и поэтому идентификация физического решения здесь не вызывает затруднений, а во-вторых, при проведении ПВА в этой области масс достаточно учесть лишь S и P -волны, что приводит всего лишь к двум нетривиальным решениям в ПВА. Наконец, и механизм образования $a_0(980)$ -мезона в реакции (4.1) представляет самостоятельный интерес, поскольку $a_0(980)$ - это совсем не обычный объект в мезонной спектроскопии. Несмотря на интенсивные теоретические и экспериментальные исследования этого состояния, предпринятые за последние 30 лет, его природа все еще до конца не выяснена, см. например [117, 118, 119, 120]. В частности, в работах [120] $a_0(980)$ -мезон рассматривается как предпочтительно $4q$ -состояние, и поэтому предсказывается значительный вклад ρ_2 -обмена ($I^G J^{PC} = 1^+2^-$) в t -канале реакции, что, в конечном счете, должно приводить к доминантному образованию $a_0(980)$ -мезона при

малых передачах импульса в реакции (4.1) в противоположность, скажем, к $a_2(1320)$ -мезону, где доминирует ρ -обмен, см. выше подраздел 4.2 настоящей диссертации.

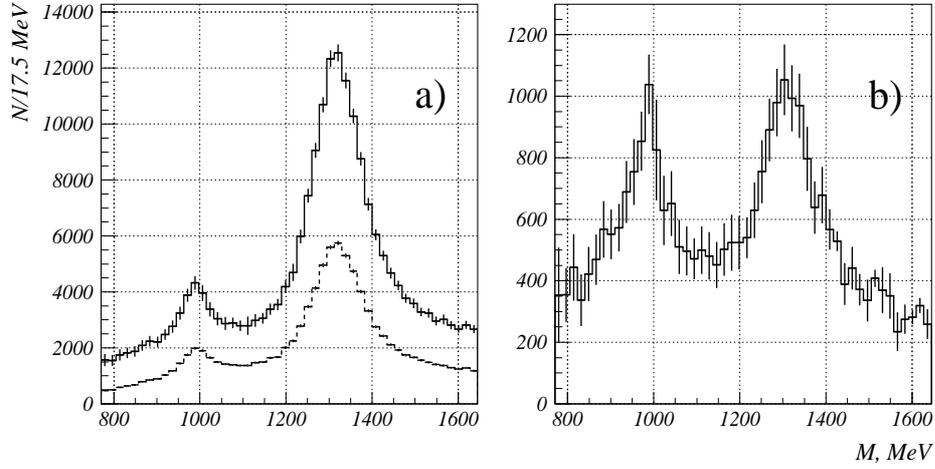


Рис. 4.9: Спектры масс $\eta\pi^0$ системы в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с: а) измеренный спектр при $-t < 1$ (ГэВ/с)² показан штриховой линией; спектр, поправленный на эффективность регистрации событий реакции показан сплошной линией; б) спектр, поправленный на эффективность регистрации реакции, но при отборе $-t < 0.05$ (ГэВ/с)².

Процедура обработки данных эксперимента подробно описана в 1-ой главе диссертации, см. также работы [18, 21]. Полученные спектры масс $\eta\pi^0$ -системы в реакции (4.1), поправленные и не поправленные на эффективность регистрации событий, при отборе $-t < 1$ (ГэВ/с)² показаны на Рис. 4.9а. Спектр масс при отборе $-t < 0.05$ (ГэВ/с)², поправленный на эффективность регистрации $\eta\pi^0$ -системы в данном эксперименте, показан на Рис. 4.9б. Два пика, соответствующие $a_0(980)$ - и $a_2(1310)$ -мезонам, ясно видны на обоих рисунках. Интенсивности их однако сильно различаются: в то время как при $-t < 1$ (ГэВ/с)² (Рис. 4.9а, сплошная линия) в спектре масс доминирует $a_2(1310)$ -мезон, при $-t < 0.05$ (ГэВ/с)², Рис. 4.9б, интенсивности обоих пиков практически одинаковы, что говорит о существенно разных механизмах образования указанных резонансов в реакции (4.1).

В механизме образования $a_2(1310)$ -мезона, как уже отмечалось выше, доминирует обмен с натуральной спин-четностью (в основном ρ -обмен) в t -канале реакции (4.1), см. [18], что приводит к подавлению рождения $a_2(1320)$

при переданных импульсах $t \sim 0$ (ГэВ/с)² [115, 121]. Что же касается $a_0(980)$ -мезона, только обмен с ненатуральной спин-четностью разрешен в t -канале реакции. Более того, как уже отмечалось выше, в силу особенностей реакции (4.1) здесь следует ожидать значительный вклад ρ_2 обмена ($I^G J^{PC} = 1^+2^-$), который в других реакциях обычно замаскирован, см. [123]. Обмен ρ_2 приводит к не исчезающе малому сечению при передачах импульса $t \sim 0$ (ГэВ/с)². Поэтому изучение дифференциального сечения образования $a_0(980)$ -мезона важно также и для понимания статуса самого ρ_2 -состояния.

Чтобы выделить вклад событий образования $a_0(980)$ -резонанса, масснезависимый парциально-волновой анализ реакции (4.1) был проведен в области масс $\eta\pi^0$ -системы от порога реакции до 1200 МэВ в 17.5 МэВ интервалах по массе системы $\eta\pi^0$ с учетом только S , P_0 , P_- и P_+ -волн (детали процедуры ПВА описаны в Главе 2). Здесь же мы еще раз отметим, что в модели ПВА с S - и P -волнами существует только два нетривиальных решения. Оба решения при $t < 1$ (ГэВ/с)² представлены на Рис. 4.10. Физическое решение может быть однозначно идентифицировано как решение с резонансным пиком в S -волне в области $a_0(980)$. Параметры резонанса $a_0(980)$

$$M = 992 \pm 3 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 90 \pm 9 \text{ MeV} \quad (4.6)$$

при этом были получены фитированием интенсивности S -волны в физическом решении некогерентной суммой функции Брейта-Вигнера и полиномиального фона, Рис. 4.10. Практически такие же параметры $a_0(980)$ -резонанса получаются, если воспользоваться для параметризации $a_0(980)$ -резонанса формулами Ачасова [123] или Флате [124]. Число событий в $a_0(980)$ -пике, нормированное на сечение образования $a_2(1320)$ -мезона в D_+ -волне реакции (4.1), было использовано для определения сечения рождения $a_0(980)$ -резонанса при импульсе 38 ГэВ/с, подробнее см. [21]:

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow a_0 n) \times BR(a_0 \rightarrow \eta\pi^0) = 68 \pm 25 \text{ nb}. \quad (4.7)$$

Далее, чтобы получить t -зависимость сечения образования $a_0(980)$ -мезона в реакции (4.1), подобный парциально-волновой анализ был также прове-

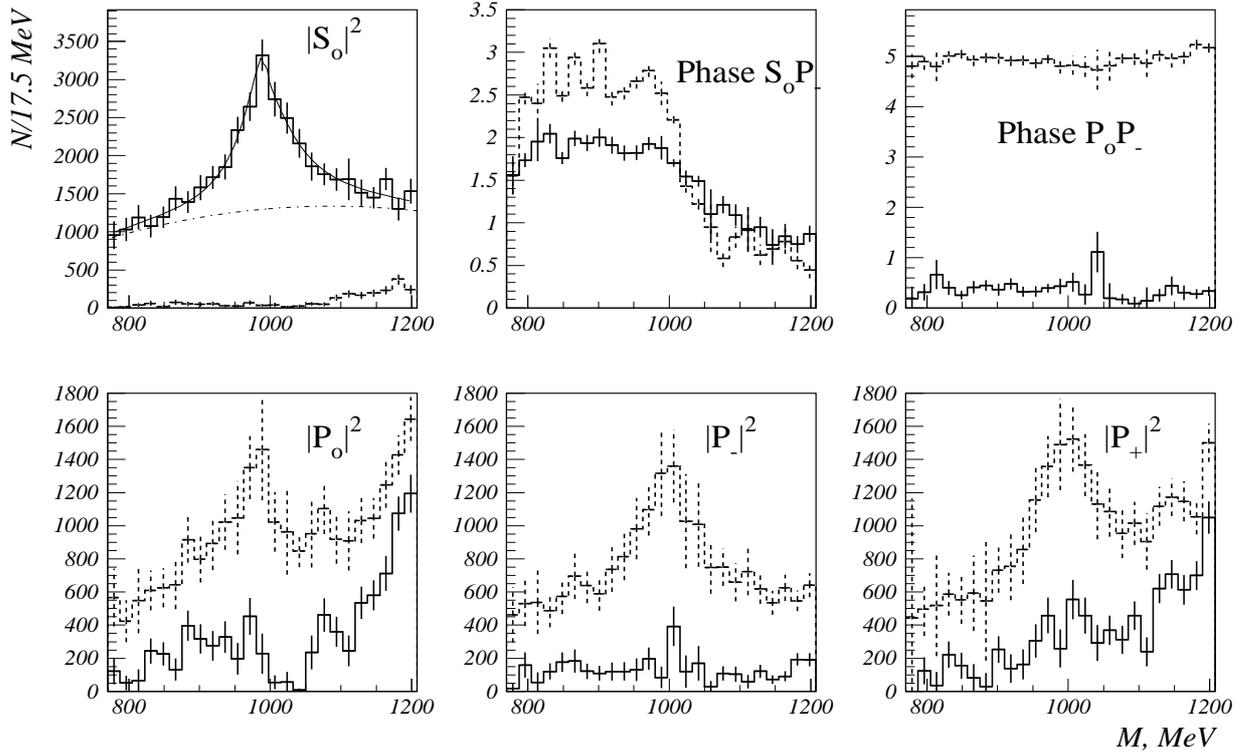


Рис. 4.10: Два нетривиальных решения в ПВА реакции (4.1) с учетом S , P_0 , P_- и P_+ -волн при импульсе 38 ГэВ/с. Физическое (нефизическое) решение показано сплошной (штриховой) линией. Сеанс 1984 г. на ГАМС-2000.

ден независимо в следующих t -интервалах: $[0, 0.05]$, $[0.05, 0.1]$, $[0.1, 0.2]$, $[0.2, 0.3]$, $[0.3, 0.5]$, $[0.5, 0.7]$ (ГэВ/с)². При этом в каждом t -интервале было определено отношение числа $a_0(980)$ -событий к полному числу событий $\eta\pi^0$ -системы $R(a_0/tot)$ в интервале масс $[945, 1035]$ МэВ. Полученное сечение $a_0(980)$ -мезона было аппроксимировано экспоненциальной функцией от t .

На заключительной стадии анализа данных ПВА был проведен в интервале масс $[945, 1035]$ МэВ независимо в 20 (МэВ/с)² бинах по квадрату переданного импульса. Количество $a_0(980)$ -событий в каждом бине по t было определено как интенсивность S -волны, скорректированная на соответствующее значение отношения $R(a_0/tot)$. Полученное t -распределение, см. Рис. 4.11, было профитировано функциями: $N_1\beta_1^2te^{\beta_1t}$ и $N_2\beta_2e^{\beta_2t}$, соответствующими b_1 и ρ_2 обменам в t -канале реакции (4.1) [122], равно как и суммой этих функций. Качество фитирования только первой функцией (b_1 -обмен) является явно неудовлетворительным ($\chi^2/N_{DoF} = 116/33$) из-за наличия пика при малых t (~ 0) в t -распределении в реакции, Рис. 4.11. Вторая функция

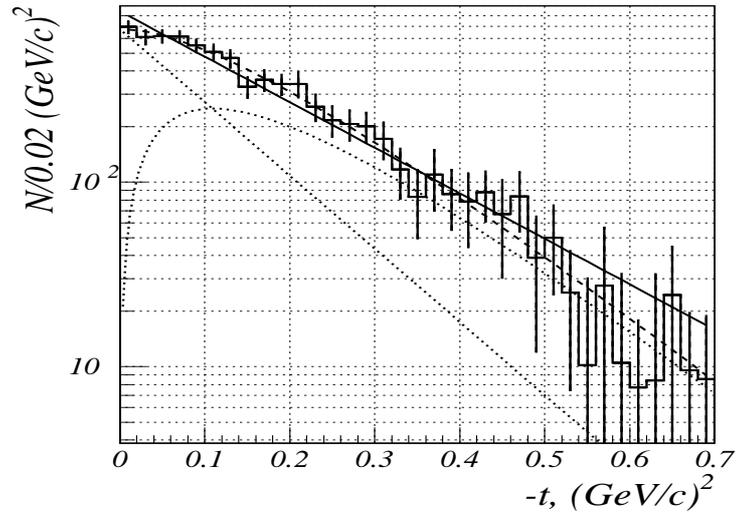


Рис. 4.11: Измеренное (гистограмма) t -распределение $a_0(980)$ -мезонов, образующихся в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с; сплошная (штриховая) линия показывает результат фита распределения функцией, соответствующей обмену ρ_2 (ρ_2 вместе с b_1) в t -канале реакции; пунктирные линии показывают индивидуальные вклады ρ_2 и b_1 обменов в случае совместного ρ_2 и b_1 фита.

(сплошная линия, $\chi^2/N_{DoF} = 27/33$), а также сумма обеих функций (штриховая линия, $\chi^2/N_{DoF} = 11/31$) фитируют измеренное дифференциальное t -распределение одинаково хорошо. Т.е. введение ρ_2 -обмена совершенно необходимо для описания дифференциального сечения образования $a_0(980)$ -мезона в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с.

Таким образом, в результате ПВА реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с в области масс до 1200 МэВ было выделено физическое решение, в котором четко виден $a_0(980)$ -мезон, измерено его сечение образования, равно как и дифференциальное t -распределение. Для описания последнего в согласии с предсказаниями работы [122] необходимо введение ρ_2 -обмена в t -канале указанной реакции.

4.5. Наблюдение $a_4^0(2040)$ -мезона в канале $\eta\pi^0$

В настоящем разделе представлены результаты масс-независимого парциально-волнового анализа событий реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с в

области масс системы $\eta\pi^0$ выше 1.6 ГэВ [21]. Как это ни звучит парадоксально, но в этой области масс, несмотря на высокую степень неоднозначности решений ПВА, см. ниже, физическое решение выделить проще чем при меньших массах, т.к. здесь должен наблюдаться доминирующий $a_4^0(2040)$ -мезон, расположенный на основной траектории Редже с квантовыми числами $I^G J^{PC} = 1^- 4^{++}$ вслед за $a_2^0(1320)$ -мезоном. При этом в механизме его образования также следует ожидать преобладания обмена с естественной спин-четностью (ρ -обмена) как и в случае $a_2^0(1320)$ -мезона. К этому следует добавить также, что ранее в области масс $M_{\eta\pi^0} > 1.6$ ГэВ парциально-волновой анализ $\eta\pi^0$ -системы не проводился ввиду недостаточной статистической обеспеченности предыдущих экспериментов.

4.5.1. Спектр масс и угловые распределения в системе $\eta\pi^0$

Как уже отмечалось выше, данные о реакции (4.1) были получены Сотрудничеством ГАМС в эксперименте на многофотонном спектрометре ГАМС-2000 в сеансе 1984 г. на пучке пионов с импульсом 38 ГэВ/с, см. [17]. При анализе использовались стандартные процедуры реконструкции, кинематического анализа и отбора событий, описанные выше в Главе 1. Всего, напомним, было выделено 140 тыс. событий реакции с квадратом 4-импульса t в интервале $|t| < 1(\text{ГэВ}/c)^2$, из которых 50 тыс. - в области масс $M_{\eta\pi^0} > 1.6$ ГэВ.

Измеренный спектр $\eta\pi^0$ -масс представлен на Рис. 4.12 слева. В области выше $a_2^0(1320)$ -мезона массовый спектр не обнаруживает заметных структур за исключением небольшого плеча в районе 2 ГэВ. Форма распределения событий реакции (4.1) по азимутальному углу Траймана-Янга ϕ_{TY} , измеренная в районе этого плеча (Рис. 4.12 справа), как и во всей области больших масс, аналогична наблюдаемой для $a_2^0(1320)$ -мезона [18]. Она однозначно свидетельствует о преобладании обмена с естественной спин-четностью ($|A_+|^2 \sim \sin^2 \phi_{TY}$) обмена в t -канале реакции и о малости вклада амплитуд с неестественной четностью, при котором $|A_-|^2 \sim \cos^2 \phi_{TY}$. Из наблюдаемой на Рис. 4.12 справа глубины модуляции ϕ_{TY} -распределения следуют ограни-

чения $|A_o/A_+|^2 < 0.6$ и $|A_-|^2 \ll |A_+|^2$, см. [18].

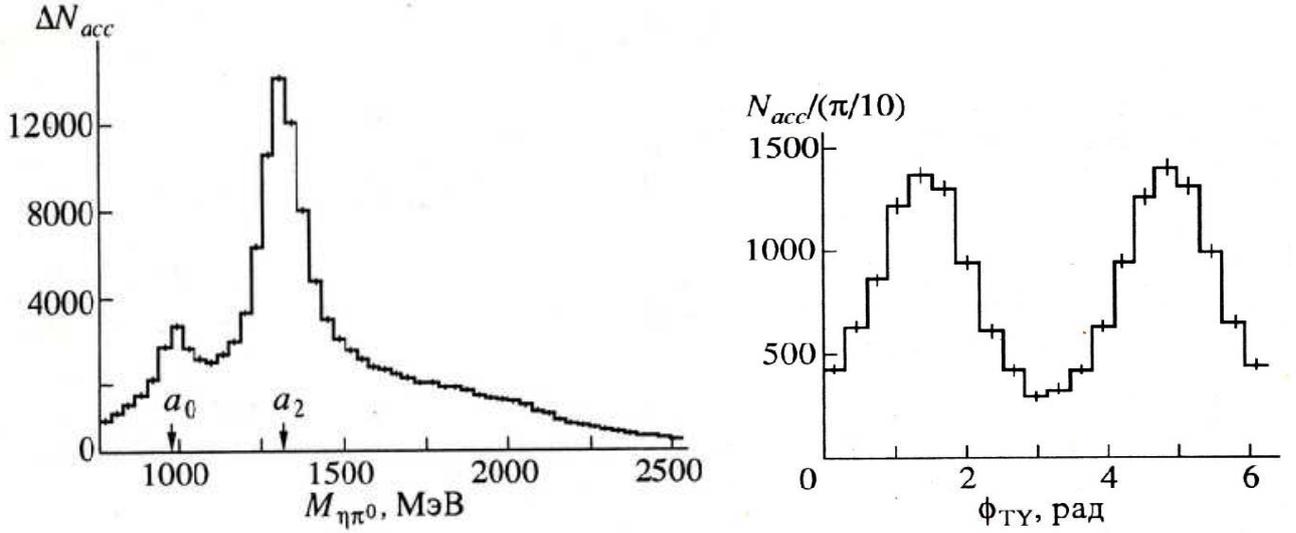


Рис. 4.12: Слева: спектр инвариантных масс $\eta\pi^0$ -системы в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с, ЗС-фит, фиксированы массы всех частиц в конечном состоянии реакции, стрелками указаны табличные значения масс $a_0(980)$ - и $a_2(1320)$ -мезонов. Справа: распределение по углу Траймана-Янга ϕ_{TJ} событий этой же реакции в системе Готтфрида-Джексона в области масс $1820 < M_{\eta\pi^0} < 2240$ МэВ.

4.5.2. Парциально-волновой анализ в терминах моментов

Анализ угловых распределений $\eta\pi^0$ -событий в системе Готтфрида-Джексона реакции (4.1) был выполнен вначале в терминах моментов t_λ независимо в каждом 35-МэВ массовом интервале (бине) $\Delta M_{\eta\pi^0}$ системы $\eta\pi^0$. Фитирование распределений было проведено по-событийно с использованием функционала максимума правдоподобия [61]:

$$F_{ML} = - \sum_{i=1}^N \ln I(\Omega_i) + \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} t_{\lambda}, \quad (4.8)$$

где t_λ и ε_λ моменты сферических гармоник, соответственно, изначального углового распределения, $I(\Omega) = \sum_{\lambda} t_{\lambda} Y_{\lambda}(\Omega)$, и эффективности регистрации событий реакции (4.1) в эксперименте, $\varepsilon(\Omega) = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} Y_{\lambda}(\Omega)$, подробнее см. в [8, 15].

Наличие в распределении по углу ϕ_{TJ} только гармоник 1 и $\cos 2\phi_{TJ}$, см. Рис. 4.12 справа, и, практически, полное отсутствие высших гармоник

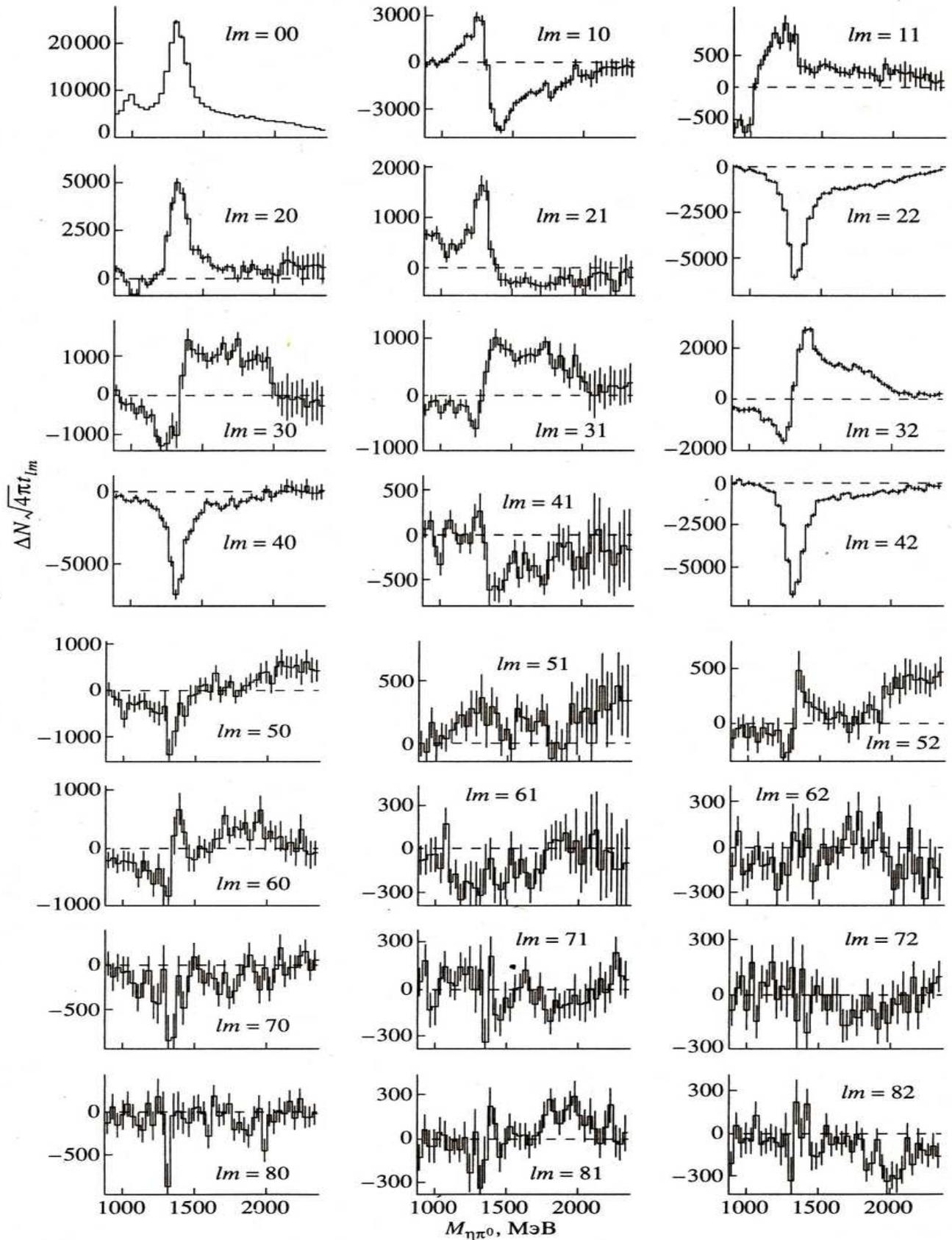


Рис. 4.13: Моменты сферических гармоник углового распределения $\eta\pi^0$ -событий в системе Готтфрида-Джексона реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с, сеанс 1984 г. на установке ГАМС-2000, $l \leq 8$, $m \leq 2$.

($\cos m\phi_{\Gamma\Upsilon}$, $m > 2$), говорит о том, что в рождении $\eta\pi^0$ -системы в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с отсутствуют парциальные волны с $|m| > 1$. В свою очередь это означает, что моментами t_λ ($\lambda \equiv lm$) с $m > 2$ в угловом распределении реакции (4.1) можно пренебречь. Далее, в области масс $\eta\pi^0$ -системы вплоть до 2500 МэВ, см. Рис. 4.12, можно ожидать образование резонансных состояний с максимальным спином, равным 4. Откуда следует, во-первых, что высшим моментом в угловом распределении реакции (4.1) в этом случае является t_{82} , что и было учтено при минимизации функционала (4.8), а во-вторых, что в парциально-волновом анализе реакции (4.1) в терминах парциальных амплитуд достаточно учитывать только волны S -, P -, D -, F - и G -волны с $|m| \leq 1$.

Полученные в результате фита моменты t_{lm} угловых распределений ($l \leq 8$, $m \leq 2$) реакции (4.1) в 35 МэВ бинах по массе $\eta\pi^0$ -системы представлены на Рис. 4.13. Как видно из рисунка, поведение практически всех моментов в зависимости от массы носит сложный резонансный характер. Вместе с тем, что касается высших моментов, t_{80} , t_{81} и t_{82} , то они выражаются исключительно через G -волны, см. [72]:

$$\Delta N \sqrt{4\pi} t_{80} = 0.831 |G_o|^2 - 0.665 (|G_-|^2 + |G_+|^2), \quad (4.9)$$

$$\Delta N \sqrt{4\pi} t_{81} = 1.115 |G_o G_-| \cos(\phi_{G_o} - \phi_{G_-}), \quad (4.10)$$

$$\Delta N \sqrt{4\pi} t_{82} = 0.421 (|G_-|^2 - |G_+|^2), \quad (4.11)$$

что позволяет уже на уровне этих моментов сделать определенные выводы о наличии резонанса в $\eta\pi^0$ -системе со спином 4 в области масс ~ 2000 МэВ. С этой целью на Рис.4.14 представлены распределения высших гармоник t_{lm} в указанной области масс, но с удвоенным бином $\Delta M_{\eta\pi^0}$. Сплошной линией на нижнем рисунке слева показан фит момента t_{82} функцией Брейта-Вигнера и некогерентным фоном. Качество фита однозначно позволяет утверждать, что в эксперименте наблюдается резонанс в G_+ -волне, преимущественно образующийся за счет обмена с естественной спин-четностью ($|G_+|^2 \gg |G_-|^2$, большие отрицательные значения момента t_{82} на рисунке). Оценки массы и

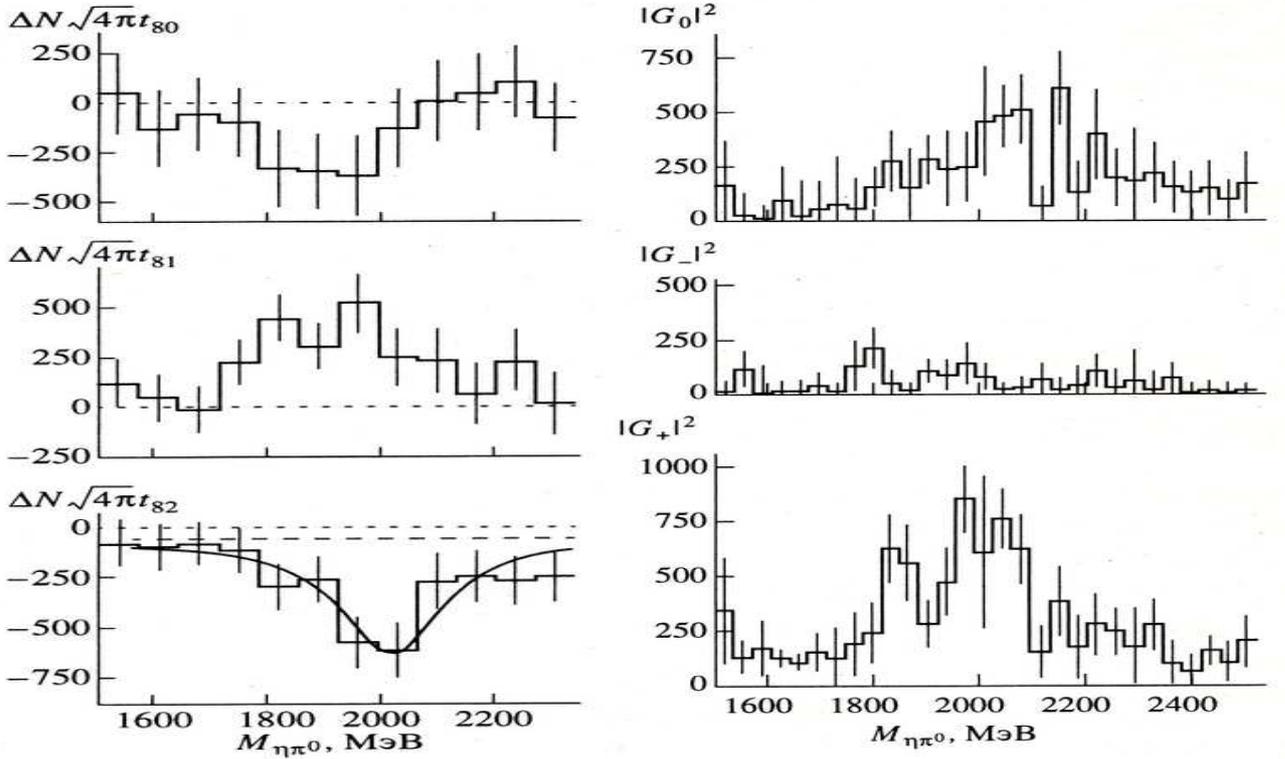


Рис. 4.14: Слева: высшие моменты t_{80} , t_{81} и t_{82} углового распределения $\eta\pi^0$ -событий в системе Готтфрида-Джексона реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с в зависимости от массы $\eta\pi^0$ -системы, но при удвоенном по сравнению с Рис. 4.13 бине ($\Delta M_{\eta\pi^0} = 70$ МэВ); сплошная линия - результат фита момента t_{82} функцией Брейта-Вигнера и некогерентным фоном (показан пунктиром). Справа: интенсивности G -волн, восстановленные из высших моментов при помощи уравнений (4.9-4.11) в предположении $\phi_{G_0} - \phi_{G_-} = 0$.

ширины резонанса получены равными:

$$M = 2020 \pm 25 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 220 \pm 140 \text{ MeV}. \quad (4.12)$$

Параметры резонанса (4.12), равно как и его квантовые числа $J^{PC} = 4^{++}$, $I^G = 1^-$, позволяют отождествить его с $a_4(2040)$ -мезоном в обозначениях таблицы частиц [92], ранее наблюдавшемся в $K_s^0 K^\pm$ - и $\pi^+ \pi^- \pi^0$ - системах.

Что касается проявления этого резонанса в G_0 -волне (неестественная спин-четность t -обмена), то отсутствие у момента t_{80} выраженного резонансного поведения в области 2000 МэВ (Рис. 4.14 слева) при малости $|G_-|^2$ однозначно интерпретируется как проявление резонанса в G_0 -волне с интенсивностью $|G_0|^2 \approx 2/3 |G_+|^2$, что непосредственно следует из уравнения (4.9).

Более точную оценку относительной интенсивности G -волн можно получить, воспользовавшись уравнениями связи для трех высших моментов

(4.9-4.11). Последние определяют величины $|G_o/G_+|^2$ и $|G_-/G_+|^2$ с точностью до разности фаз между G_o - и G_- -волнами, $\phi_{G_o G_-} = \phi_{G_o} - \phi_{G_-}$. По аналогии с механизмом образования $a_2(1320)$ -мезона естественно предположить, что в области $a_4(2040)$ -мезона $\phi_{G_o G_-} = 0$. В этом случае можно легко восстановить интенсивности G -волн, исходя из высших моментов на Рис. 4.14 справа. В результате для отношения вкладов обменов с неестественной и естественной спин-четностью:

$$R_G = (|G_o|^2 + |G_-|^2)/|G_+|^2 \quad (4.13)$$

получаем значение $R_G \approx 0.4$, подробнее см. в работе [21].

Независимую оценку величины отношения (4.13) можно получить также, исходя из вида t -распределения событий реакции. Образование резонанса с квантовыми числами a_4^0 -мезона может идти в реакции (4.1) посредством обмена ρ -траекторией Редже (естественная спин-четность), а также b - и ρ_2 -траекториями (неестественная спин-четность). Асимптотика t -зависимости дифференциального сечения реакции (4.1) при $t \rightarrow 0$ существенно различна для разных типов обмена. В частности, в случае естественной спин-четности вклад в сечение образования a_4^0 -мезона (G_+ -волна) дают как амплитуды без переворота спина нуклона ($d\sigma/dt \sim |t|$), так и амплитуды с переворотом спина ($d\sigma/dt \sim |t|^2$). В результате [21] дифференциальное сечение при естественной спин-четности t -обмена может быть представлено в виде $d\sigma/dt = C_1|t| \exp(\beta t) + C_2|t|^2 \exp(\beta t)$, где экспоненциальный множитель представляет собой формфактор.

В случае обмена b - и ρ_2 -траекториями основной вклад в образование a_4^0 -мезона в G_o -волне (неестественная спин-четность) при малых $|t|$ дает амплитуда без переворота спина нуклона [115, 121], в силу чего $d\sigma/dt \sim const$. Вклад же G_- -волны, как было показано выше, составляет не более трети от G_o -волны. В результате дифференциальное сечение образования a_4^0 -мезона при неестественной спин-четности t -обмена имеет вид $d\sigma/dt = C_0 \exp(\beta t)$.

Измеренное t -распределение $\eta\pi^0$ -событий из области a_4^0 -мезона (1820 - 2240 МэВ) представлено на Рис. 4.15. Завал при $t \rightarrow 0$ указывает на домини-

рующей вклад обмена с естественной спин-четностью (учет t -зависимости эффективности регистрации практически не сказывается на форме t -распределения). Такой же завал сечения наблюдается и в случае $a_2^0(1320)$ -мезона [81, 84], у которого величина, аналогичная (4.13) (но для D -волны), при импульсе 40 ГэВ/с также мала: $R_D < 0.3$ [21, 81].

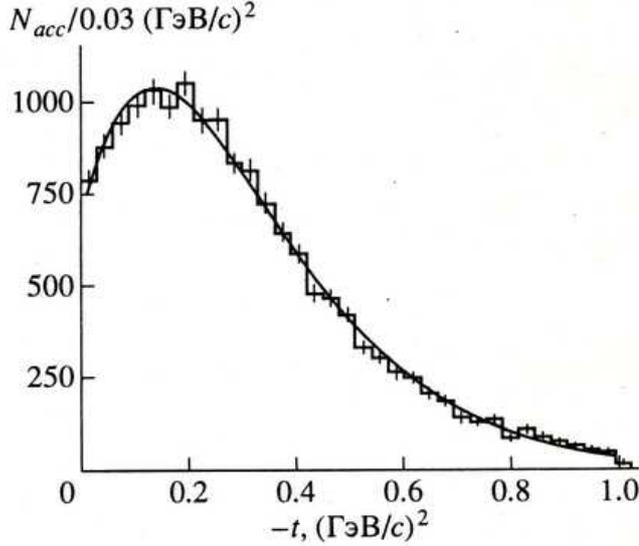


Рис. 4.15: Распределение событий из области a_4^0 -пика (1820 - 2240 МэВ) в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с по квадрату переданного 4-импульса. Кривая - результат описания распределения трехчленом $C_0 \exp(\beta t) + C_1 |t| \exp(\beta t) + C_2 |t|^2 \exp(\beta t)$, см. основной текст.

Для оценки отношения (4.13) был проведен фит t -распределения трехчленом с различной асимптотикой при малых $|t|$:

$$d\sigma/dt = C_0 \exp(\beta t) + C_1 |t| \exp(\beta t) + C_2 |t|^2 \exp(\beta t),$$

см. Рис. 4.15. Полученное соотношение этих трех компонент дифференциального сечения, 1 : 2.2 : 1.9, приводит к оценке величины (4.13) в области масс a_4^0 -мезона ≈ 0.25 . Вклад низших волн в указанной области масс не превышает 50%, так что величина (4.13) для a_4^0 -мезона может возрасти не более чем вдвое, т.е. до $R_G \approx 0.5$. Все это указывает на преобладание t -обмена с естественной спин-четностью в механизме образования $a_4^0(2040)$ -резонанса.

4.5.3. Парциально-волновой анализ в терминах амплитуд

Качественные оценки как параметров $a_4^0(2040)$ -резонанса, так и вклада обменов с различной спин-четностью подтвердились при проведении строгого ПВА непосредственно в терминах амплитуд реакции (4.1), см. [21]. Как уже

отмечалось выше, модель ПВА включала S , P_0 , P_- , P_+ , D_0 , D_- , D_+ , F_0 , F_- , F_+ , G_0 , G_- и G_+ -волны. В результате степень неоднозначности при проведении ПВА при указанном наборе волн весьма велика, а именно в каждой бине по массе системы $\eta\pi^0$ существует 128 нетривиальных решений. В результате минимизации функционала (4.8), в котором моменты углового распределения t_λ были выражены через квадраты амплитуд указанных выше волн и их относительные фазы при помощи уравнений, аналогичных уравнениям (2.10), конкретный вид этих уравнений см. в [72], для каждого массового интервала было получено одно из 128 возможных решений. Поиск остальных 127 нетривиальных решений в секторе волн с неестественной спин-четностью был выполнен методом [9] для случая максимального спина 4. При этом в силу уравнения (4.11) и малости G_- -волны для каждого из 128 решений квадрат модуля G_+ -волны определяется, практически, однозначно. В то же время степень неоднозначности P_{+-} , D_{+-} и F_{+-} -волн, для каждого из найденных решений в секторе амплитуд с неестественной спин-четностью, вообще говоря, выше. Тем не менее при проведении ПВА искалось лишь одно (случайное) решение для P_{+-} , F_{+-} и D_{+-} -волн для каждого из 128 решений в секторе волн с неестественной спин-четностью в каждом массовом интервале.

На Рис. 4.16 представлены все найденные таким образом 128 решений для двух массовых интервалов в максимуме $a_4^0(2040)$ -пика. Как видно из рисунка, разброс от решения к решению квадратов амплитуд G_{+-} и G_0 -волн и разностей фаз G_+ -волны и P_+ , и F_{+-} -волн невелик. Столь же малый разброс наблюдается и для решений в остальных массовых интервалах, лежащих в области $a_4^0(2040)$ -пика. В тех интервалах, где интенсивность G_- -волны мала, такая степень неоднозначности есть простое следствие уравнений (4.9-4.11), левые части которых, как уже упоминалось выше, определяются однозначно. Слабое проявление неоднозначности в амплитудах G -волн позволило избежать сшивки решений. В каждом массовом интервале для дальнейшего анализа было выбрано среднее между минимальным и максимальным из всех 128 решений; возникающие при этом неопределенности были учтены в системати-

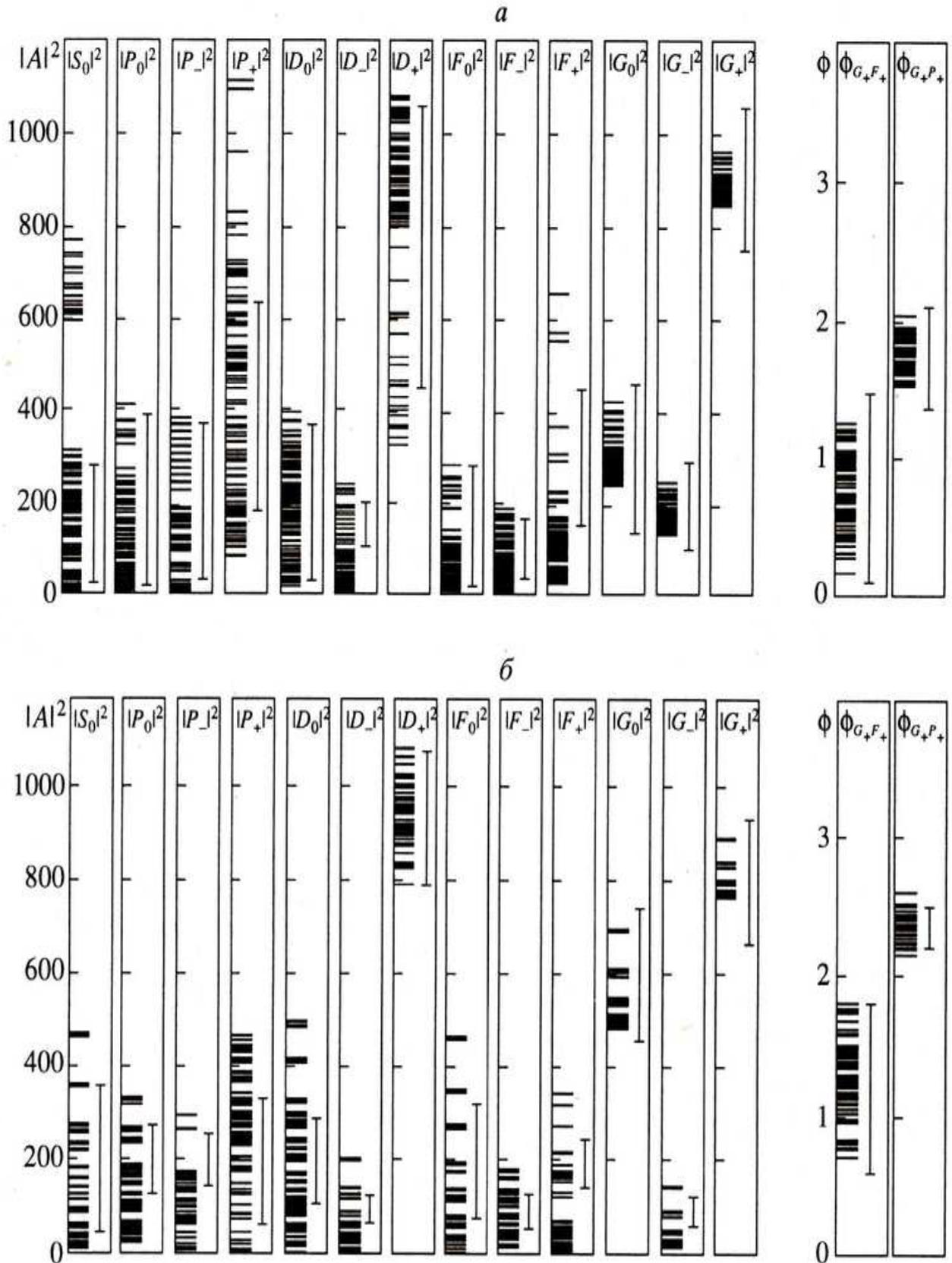


Рис. 4.16: 128 решений в ПВА реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с в интервалах масс $M_{\eta\pi^0}$: а) 1960 - 1995 МэВ и б) 2030 - 2065 МэВ. Каждое решение показано горизонтальной прямой, вертикальные отрезки - статистические погрешности фита (они мало меняются при переходе от одного решения к другому); $\phi_{G_+F_+} = \phi_{G_+} - \phi_{F_+}$, $\phi_{G_+P_+} = \phi_{G_+} - \phi_{P_+}$.

ческих ошибках. Результат представлен на Рис. 4.17. Рисунок демонстрирует

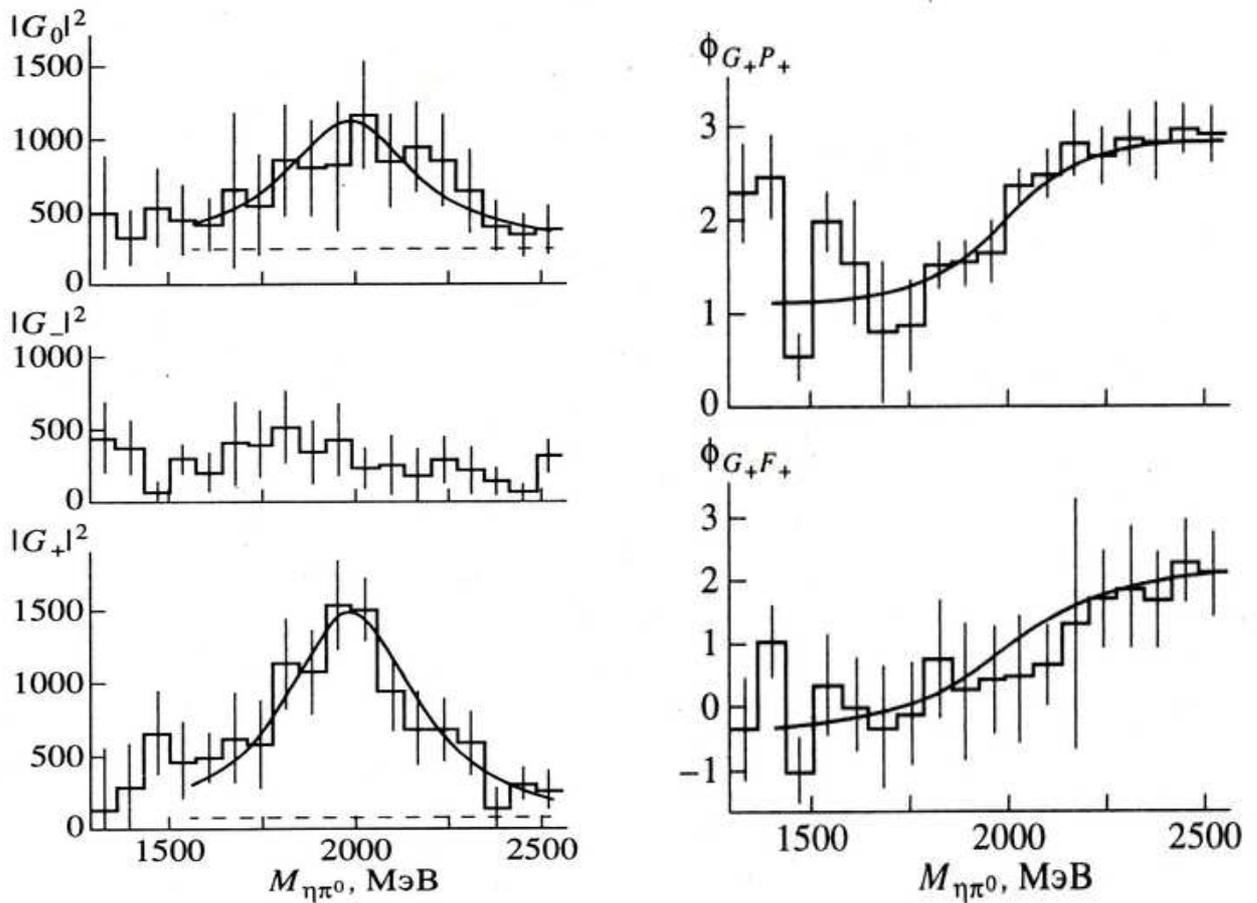


Рис. 4.17: Слева: квадраты амплитуд G_0 , G_- и G_+ -волн (ошибки включают в себя как статистические, так и систематические погрешности, см. основной текст). $\Delta M_{\eta\pi^0} = 70$ МэВ. Кривые - результат совместного фита квадратов амплитуд G_+ - и G_0 -волн. Некогерентный фон показан пунктиром. Справа: Разности фаз G_+ -волны и F_+ - и P_+ -волн. $\Delta M_{\eta\pi^0} = 70$ МэВ. Кривые показывают поведение G_+ -фазы для резонанса с параметрами (4.14) относительно линейно меняющихся F_+ - и P_+ -фаз.

четкое резонансное поведение G_+ и G_0 -волн, при этом интенсивность G_- -волны мала. Относительная фаза G_0 и G_- -волн в рассматриваемой области масс практически постоянна: $0.35 < \cos \phi_{G_0 G_-} < 0.72$ (CL = 90 %), что находится в согласии с качественными аргументами, обсуждавшимися выше. Фазы G_+ -волны относительно F_+ и P_+ -волн также показывают резонансную зависимость от массы: в области a_4^0 -пика они меняются на величину, близкую к π (Рис. 4.17, справа). Таким образом, мы приходим к выводу о наблюдении в системе $\eta\pi^0$ резонанса со спином 4 как в G_+ , так и в G_0 -волнах.

4.5.4. Параметры $a_4^o(2040)$ -резонанса, сечение образования

Параметры a_4^o -резонанса были определены при совместном фите интенсивностей G_+ и G_o -волн (Рис. 4.17) некогерентной суммой функцией Брейта-Вигнера и констант, описывающих нерезонансные части этих волн. С учетом аппаратурного разрешения в этой области масс $\eta\pi^0$ -системы, равного 50 МэВ, они получены равными:

$$M = 2010 \pm 20 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 370 \pm 80 \text{ MeV}, \quad (4.14)$$

Резонансные кривые с параметрами (4.14) хорошо описывают также и относительные фазы G_+ -волны с P_+ и F_+ -волнами, см. Рис. 4.17 справа. Параметры (4.14) резонанса $a_4^o(2040)$ хорошо согласуются с результатами предыдущих измерений [92].

Фитирование интенсивности G_- -волны функцией Брейта-Вигнера с параметрами (4.14) и нерезонансным фоном показало, что вклад резонанса $a_4^o(2040)$ в G_- -волну незначителен. Отношение вкладов обменов с неестественной и естественной спин-четностью (4.13) было поэтому определено только по интенсивностям G_o и G_+ -волн равным:

$$R_G = 0.60 \pm 0.16, \quad (4.15)$$

что согласуется с полученной в предыдущем разделе независимой качественной оценкой этой величины.

Наконец, сечения образования $a_4^o(2040)$ -резонанса в G_+ и G_o -волнах были определены путем нормировки на сечение образования $a_2^o(1320)$ -мезона в D_+ -волне. С этой целью в области масс $M_{\eta\pi^0} < 1600$ МэВ был проведен парциально-волновой анализ реакции (4.1) с учетом S -, P - и D -волн с $|m| \leq 1$, т.к. вкладом F - и G -волн в этой области масс можно пренебречь. Полученные моменты $\Delta N \sqrt{4\pi} t_{lm}$ ($l \leq 4$, $m \leq 2$) при этом практически не отличаются от приведенных на Рис. 4.13. Однако проблема неоднозначности решений ПВА в этом случае существенно упрощается и сводится к существованию всего лишь восьми нетривиальных решений в каждом массовом интервале,

см. [9, 12]. При этом собственно высшие волны, D_- и D_+ , затронуты неоднозначностью, см. например, Рис. 4.6, достаточно слабо, т.к. вариация вклада $a_2^o(1320)$ -мезона в D_+ -волну при переходе от одного решения к другому в этом случае незначительна. Ниже она учтена в систематических ошибках отношения сечений образования $a_4^o(2040)$ - и $a_2^o(1320)$ -мезонов. В результате отношение сечений образования этих мезонов в реакции (4.1) в t -канале с естественной спин-четностью обмена получено равным:

$$\sigma_{G_+}(\pi^- p \rightarrow a_4^o n) \cdot BR(a_4^o \rightarrow \eta \pi^o) / \sigma_{D_+}(\pi^- p \rightarrow a_2^o n) \cdot BR(a_2^o \rightarrow \eta \pi^o) = 0.15 \pm 0.02. \quad (4.16)$$

Вклад систематической погрешности в приведенную выше общую погрешность составляет величину $\approx 10\%$.

Сечение образования $a_2^o(1320)$ -мезона было определено ранее [84]. Из этих данных следует, что при импульсе 38 ГэВ/с

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow a_2^o n) \cdot BR(a_2^o \rightarrow \eta \pi^o) = 440 \pm 170 \text{ nb}.$$

Учитывая, далее, что вклад D_+ -волны в сечение образования $a_2^o(1320)$ -мезона составляет 85% [18, 81, 84], и используя (4.15), получаем значение сечения образования $a_4^o(2040)$ -резонанса в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с равным:

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow a_4^o n) \cdot BR(a_4^o \rightarrow \eta \pi^o) = 90 \pm 35 \text{ nb}. \quad (4.17)$$

Из этой величины на долю G_+ -волны приходится 56 ± 20 нб, на G_o -волну 34 ± 12 нб, а вклад G_- -волны в сечение оценивается меньшим 7 нб.

4.6. Анализ $\eta\pi^o$ -системы в области масс до 1800 МэВ

Область масс $\eta\pi^o$ -системы от 1200 МэВ до 1800 МэВ в реакции (4.1) является наиболее сложной с точки зрения поиска физического решения ПВА и, одновременно, наиболее интересной в плане интерпретации полученных результатов. В отличие от области масс вблизи порога (до 1200 МэВ), где для проведения ПВА было достаточно ограничиться лишь S - и P - волнами (и поэтому мы имели здесь всего два нетривиальных решения), для

корректного анализа в области 1200-1800 МэВ необходимо учитывать, по крайней мере, 7 основных парциальных волн: S , P_0 , P_- , P_+ , D_0 , D_- и D_+ , что, как уже отмечалось выше, приводит к восьми нетривиальным решениям. Более того, эта сравнительно небольшая область масс оказалась "перезаселенной" резонансами. Так наряду с доминирующим в этой области $a_2(1320)$ -мезоном, разные группы сообщают о наблюдении еще трех резонансов: $a_0(1300)$, $\pi_1(1370)/\hat{\rho}(1405)$ и $a_0(1450)$, см. [92, 106, 125, 126, 127]. В этой связи проблема выбора физического решения, равно как и интерпретации полученных результатов становится здесь весьма острой.

4.6.1. Процедура ПВА, сшивка нетривиальных решений

Результаты ПВА, Рис. 4.13, в терминах моментов сферических гармоник \tilde{t}_λ ($\lambda = l, m$) для системы $\eta\pi^0$, образующейся в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с [21], легко могут быть пересчитаны в терминах парциальных амплитуд S , P_- , P_0 , P_+ , D_- , D_0 , D_+ реакции (4.1) посредством минимизации функционала

$$F = \Sigma_\lambda (\tilde{t}_\lambda - t_\lambda(S, P, D))^2 / \sigma_\lambda^2, \quad (4.18)$$

где моменты $t_\lambda(S, P, D)$ выражаются в терминах парциальных амплитуд и фаз при помощи уравнений (2.10), детали см. в работе [27]. Фактически, мы воспользовались здесь методом анализа ML' , подробно исследованном нами выше в главе 2, где, в частности, было показано, что этот метод дает сравнимые по качеству результаты с методом максимума правдоподобия ML , подробнее см. подраздел 2.3 диссертации.

Восемь нетривиальных решений в каждом бине по массе системы $\eta\pi^0$ находились методом, описанном в подразделе 2.2, см. также [9, 73]. А сшивка восьми нетривиальных решений, полученных независимо во всех бинах по массе $\eta\pi^0$ -системы, проводилась в соседних бинах при помощи корней функции Герстена, подобно тому как это было сделано в работе [13]. Полученные в результате реальные и мнимые части корней Герстена представлены на

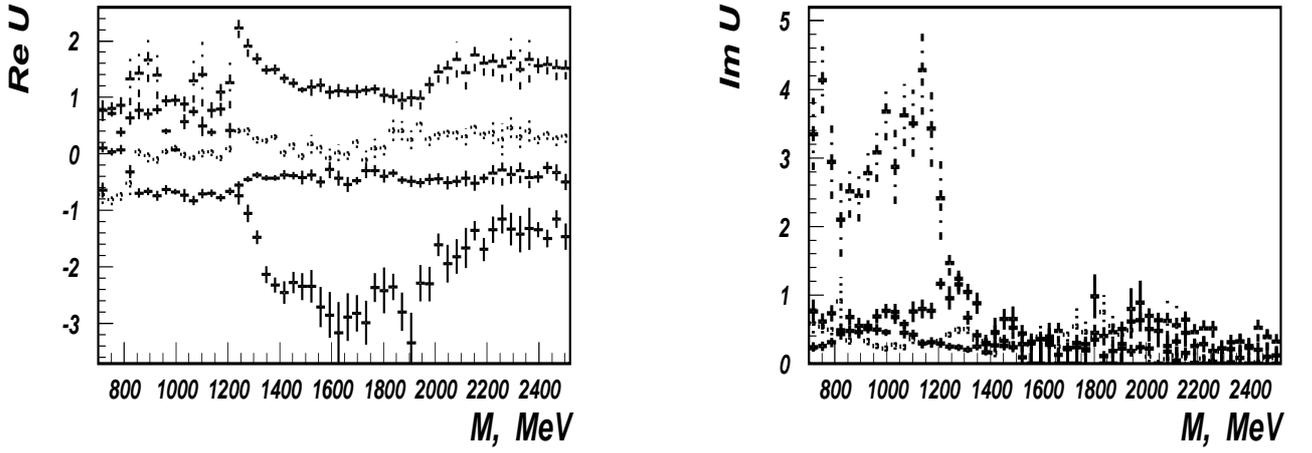


Рис. 4.18: Реальные и мнимые части корней функции Герстена в ПВА системы $\eta\pi^0$ при импульсе 38 ГэВ/с по данным эксперимента ГАМС-2000 [21].

Рис. 4.18. Из рисунка ясно видно, что в области масс $\eta\pi^0$ -системы до 1200 МэВ имеет место существенное перекрытие корней и, следовательно, решений ПВА. Тогда как при больших массах, т.е. в области 1200-1800 МэВ, все восемь решений хорошо разделяются, и поэтому их сшивка здесь проводится достаточно легко. В результате мы получаем восемь *глобальных* неперекрывающихся нетривиальных решений для этой области масс.

4.6.2. Выбор физического решения

Чтобы выбрать физическое решение из восьми найденных глобальных решений в ПВА реакции (4.1) мы воспользовались критерием физического решения, предложенным в работе [18], согласно которому в модели полюсов Редже отношение R сечения рождения резонанса с ненатуральной спин-четностью обмена в t -канале зарядовообменной $\pi^- p$ реакции к сечению с натуральной спин-четностью при доминирующих b - и ρ -обменах падает с ростом импульса пучка p_π как

$$R(p_\pi) \approx \alpha/p_\pi. \quad (4.19)$$

Эта модель хорошо работает, например, в случае реакции

$$\pi^- p \rightarrow \omega n, \quad (4.20)$$

доминирующий вклад в сечение которой дают те же самые обмены, b и ρ , что и в случае образования $a_2(1320)$ -мезона в реакции (4.1). В частности,

модель Редже предсказывает изменение в наклоне зависимости сечения реакции (4.20) от импульса пиона в области, где сравниваются вклады обменов с натуральной и ненатуральной спин-четностью, что напрямую подтверждается экспериментальными данными, см. Рис. 4.19, взятый из работ [128]. Дей-

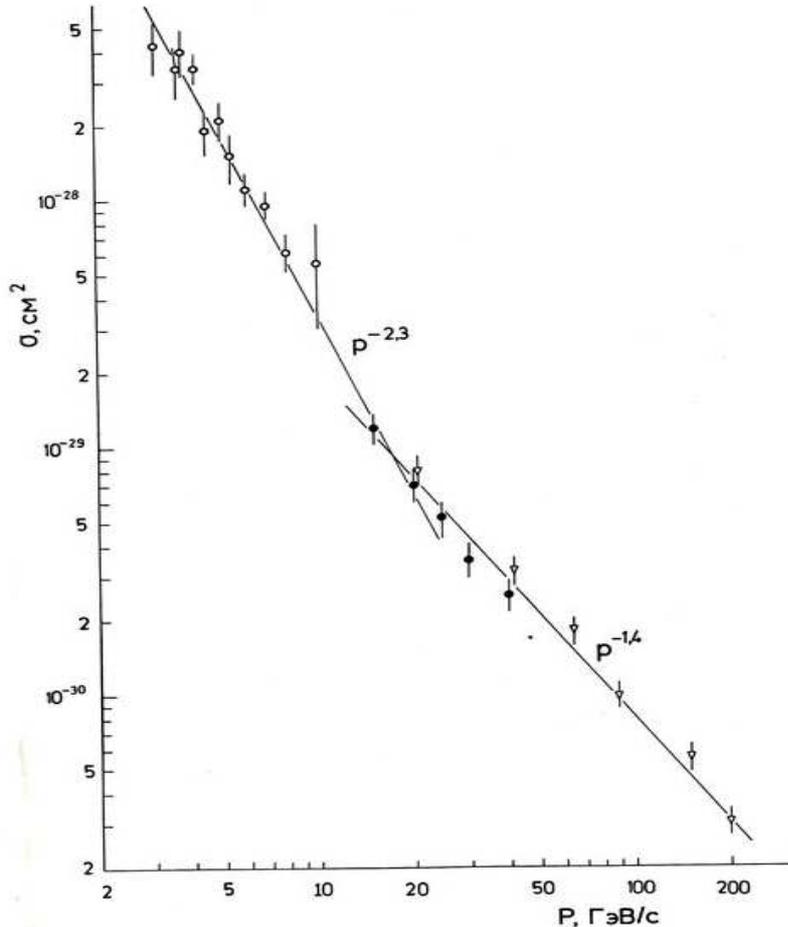


Рис. 4.19: Зависимость сечения рождения ω -мезона в реакции перезарядки (4.20) от импульса пиона [128].

ствительно, при малых импульсах пиона доминирует обмен с ненатуральной спин-четностью, тогда как при больших импульсах — обмен с натуральной спин-четностью, зависимость вклада которого от импульса более пологая, чем в случае обмена с ненатуральной спин-четностью, что и приводит к излому сечения при $p_\pi \sim 15$ ГэВ/с на рисунке: при меньших импульсах параметр наклона равен -2.3 (ГэВ/с) $^{-1}$, а при больших импульсах он равен -1.4 (ГэВ/с) $^{-1}$, так что разница в наклонах обменов с ненатуральной и натуральной спин-четностью равна в результате -0.9 (ГэВ/с) $^{-1}$, что находится в хорошем согласии с предсказанием (4.19).

Что касается рождения $a_2(1320)$ -мезона в реакции (4.1), отношение се-

чений $R(p_\pi)$ для него было определено следующим образом:

$$R_{a_2} = \frac{\sigma_{D_-}(\pi^- p \rightarrow a_2 n) + \sigma_{D_0}(\pi^- p \rightarrow a_2 n)}{\sigma_{D_+}(\pi^- p \rightarrow a_2 n)}. \quad (4.21)$$

Единственная константа α , входящая в уравнение (4.19), может быть определена на основе более ранних измерений [89, 105] сечения рождения $a_2(1320)$ -мезона в реакции перезарядки при меньших импульсах. В результате зависимость отношения сечений (4.21) с натуральной и ненатуральной спин-четностью обменов от импульса p_π оказывается полностью зафиксированной, см. Рис. 4.20, а сами измерения в этой связи следует интерпретировать как самосогласованные.

Изменение наклона сечения рождения $a_2(1320)$ -мезона в зависимости от p_π возникает при $R(p_\pi) = 1$, т.е. при импульсе пучка $p_\pi \approx 15$ ГэВ/с, Рис. 4.20, подобно тому, как это имеет место в случае образования ω -мезона в зарядовообменной реакции (4.20), см. Рис. 4.19. При импульсе пучка 38 ГэВ/с это отношение для $a_2(1320)$ -мезона должно быть равно ≈ 0.4 , Рис. 4.20, что, интересно отметить, находится также в согласии и с таким же отношением для $a_4(2050)$ -мезона, см. (4.15). Поэтому физическое решение в парциально-

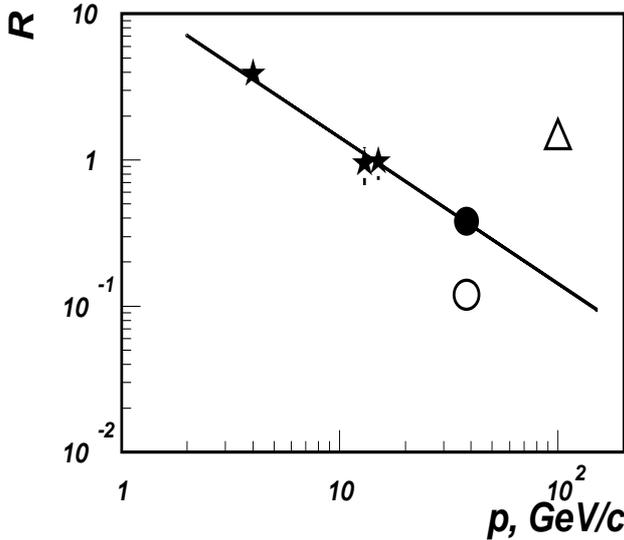


Рис. 4.20: Зависимость отношения (4.21) от импульса π пучка: \star - первые независимые измерения [89, 105], \triangle - первые данные ПВА ГАМС'88 при импульсе 100 ГэВ/с [76], см. также [18]; \circ - данные ПВА ГАМС'97 [111]; \bullet - физическое решение ПВА в работе [23].

волновом анализе реакции (4.1) может быть теперь идентифицировано как таковое, для которого отношение (4.21) должно быть равно ≈ 0.4 . Оказалось, что среди полученных выше восьми глобальных решений ПВА существует лишь одно решение, для которого это отношение 0.38 ± 0.015 (на Рис. 4.20 оно показано жирной точкой) очень близко к указанному физическому значению,

которое должно быть при импульсе 38 ГэВ/с. Для всех других глобальных решений ПВА отношение (4.21) существенно меньше 0.4, т.е. это отношение в данных ПВА при 38 ГэВ/с достигает своего максимума на физическом решении. В этой связи следует также отметить, что ПВА реакции (4.1) был проведен и в эксперименте E852 при импульсе 18 ГэВ/с [112], где также было измерено отношение (4.21), которое при 18 ГэВ/с оказалось равным 0.72 ± 0.12 , а должно быть равным ≈ 0.8 , т.е. это значение также очень хорошо ложится на прямую на Рис. 4.20.

4.6.3. Интерпретация физического решения

В интенсивностях D_0 и D_+ -волн полученного физического решения, см. Рис. 4.21, наблюдаются характерные пики при массе ~ 1300 МэВ. Эти пики

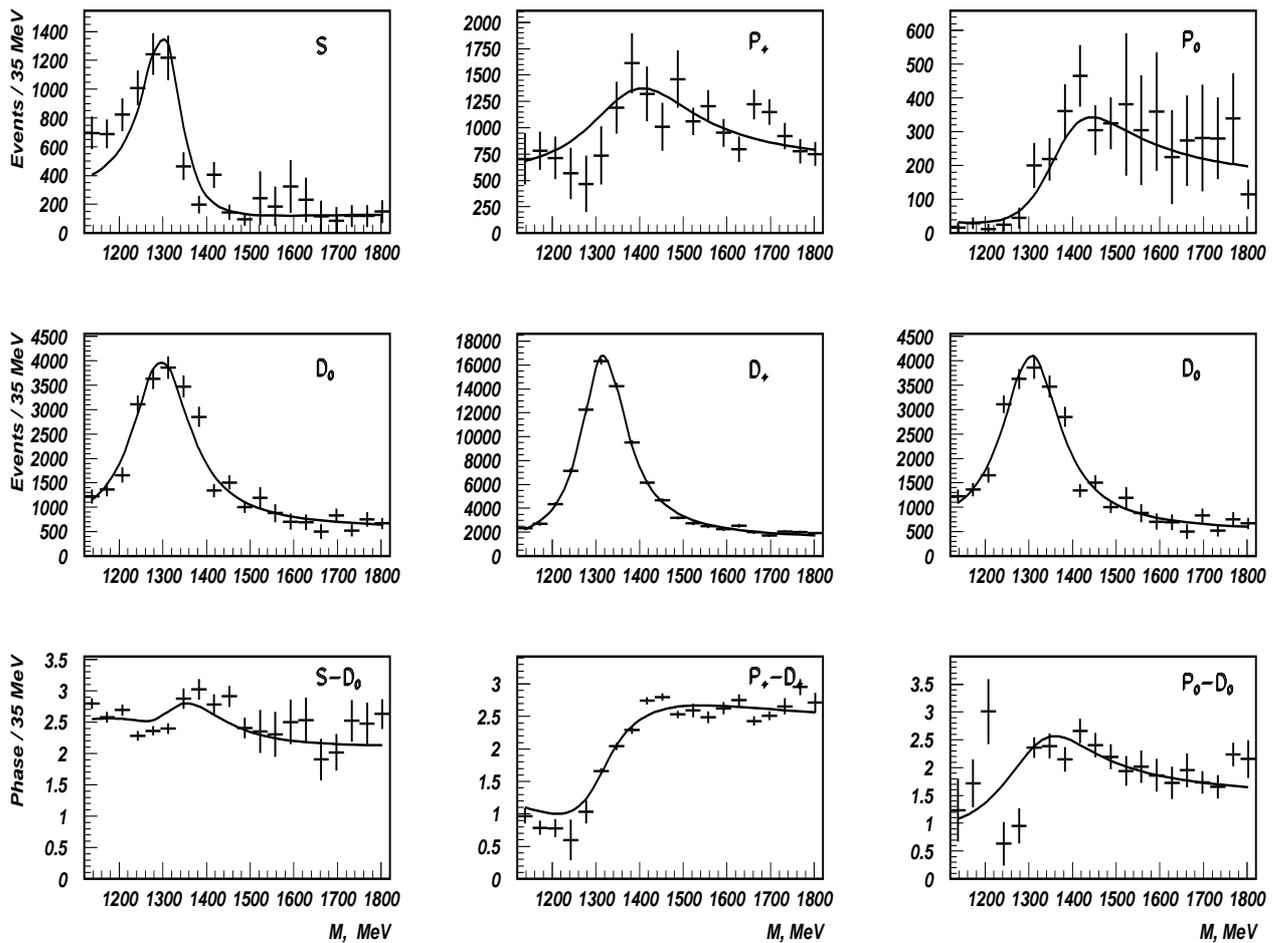


Рис. 4.21: Интенсивности и относительные фазы парциальных волн в физическом решении ПВА системы $\eta\pi^0$, образующейся в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с, по данным работы [23]: S - и D_0 -волн (первый столбец гистограмм), P_+ - и D_+ -волн (средний столбец гистограмм) и P_0 - и D_0 -волн (третий столбец). Дальнейшие пояснения см. в основном тексте.

соответствуют образованию $a_2(1320)$ -мезона в реакции (4.1). В S -волне также наблюдается пик при ~ 1300 МэВ. Он может быть приписан $a_0(1300)$ -мезону, о наблюдении которого в системах $\eta\pi$ и $\bar{K}K$ сообщалось в работах [129, 130] и [131] соответственно.

Одновременный фит интенсивностей S - и D_0 -волн, а также их относительных фаз демонстрирует хорошее описание всех этих распределений в рамках простой модели, включающей релятивистские функции Брейта-Вигнера для описания указанных выше резонансов и комплексные константы для описания фона независимо в каждой волне, см. первый столбец на Рис. 4.21.

Полученные значения массы и ширины резонанса в D_0 -волне находятся в хорошем согласии с табличными значениями для $a_2(1320)$ -мезона [102], в то время как значения параметров резонанса в S -волне

$$M = 1308 \pm 6 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 101 \pm 14 \text{ MeV}, \quad (4.22)$$

хорошо согласуются с параметрами резонанса, наблюдаемого ранее в работе [131], эксперимент OBELIX. Этот результат не противоречит и результатам работы [112].

В интенсивностях P_+ и P_0 -волн (см. две верхних гистограммы справа на Рис. 4.21) не просматривается такого же ясного резонансного поведения как в случае S -волны. Тем не менее, если зафиксировать массу резонанса в P_+ и P_0 -волнах равной 1370 МэВ в соответствии с данными эксперимента E852 [132], то можно получить достаточно хорошее совместное описание резонансного поведения интенсивностей P_+ , D_+ -волн и их относительной фазы (см. средний столбец гистограмм на Рис. 4.21), равно как P_0 и D_0 -волн (третий столбец гистограмм на Рис. 4.21), одновременно в рамках простой физической модели, включающей релятивистские функции Брейта-Вигнера для описания резонансов и комплексные константы для описания фона в каждой волне, как это уже было использовано выше для описания S - и D_0 -волн. Полученные таким образом ширины резонансов в P_+ - и P_0 -волнах:

$$\Gamma_{P_+} = 300 \pm 125 \text{ MeV}, \quad \Gamma_{P_0} = 225 \pm 50 \text{ MeV}, \quad (4.23)$$

находятся в хорошем согласии с данными эксперимента E852 для резонанса $\pi_1(1370)$ [132], а также с результатами коллаборации Crystal Barrel [133]. В результате мы приходим к выводу, что представленные выше результаты ПВА не противоречат существованию экзотического $\pi_1(1370)$ -резонанса с параметрами, согласующимися с данными эксперимента E852 [132].

Отношения сечений рождения резонансов $a_0(1300)$, $\pi_1(1370)$ и $a_2(1320)$ в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с получены равными:

$$\frac{\sigma(\pi^- p \rightarrow a_0^o(1300)n) \cdot BR(a_0^o(1300) \rightarrow \eta\pi^o)}{\sigma_{D_0}(\pi^- p \rightarrow a_2^o n) \cdot BR(a_2^o \rightarrow \eta\pi^o)} = 0.27 \pm 0.04, \quad (4.24)$$

$$\frac{\sigma_{P^+}(\pi^- p \rightarrow \pi_1^o(1370) n) \cdot BR(\pi_1^o(1370) \rightarrow \eta\pi^o)}{\sigma_{D^+}(\pi^- p \rightarrow a_2^o n) \cdot BR(a_2^o \rightarrow \eta\pi^o)} = 0.054 \pm 0.016, \quad (4.25)$$

$$\frac{\sigma_{P_0}(\pi^- p \rightarrow \pi_1^o(1370) n) \cdot BR(\pi_1^o(1370) \rightarrow \eta\pi^o)}{\sigma_{D_0}(\pi^- p \rightarrow a_2^o n) \cdot BR(a_2^o \rightarrow \eta\pi^o)} = 0.12 \pm 0.03, \quad (4.26)$$

где показаны только статистические ошибки, другие детали см. в работе [27].

Таким образом, последовательный парциально-волновой анализ реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с в области масс до 1800 МэВ позволил снять все противоречия в отношении механизма образования $a_2(1320)$ -мезона в этой реакции, отмеченные ранее в работах [115, 114], найти восемь нетривиальных решений ПВА и аргументированно идентифицировать среди них физическое. В интенсивности S -волны наблюдается при этом резонанс $a_0(1300)$, который ранее наблюдался в эксперименте OBELIX [131], а также резонанс $a_0(980)$, дифференциальное t -распределение которого в реакции (4.1) было измерено. Вместе с тем, что касается экзотического состояния $\pi_1(1370)$, статистика данных эксперимента [27] не позволяет сделать строгих независимых выводов о наблюдении указанного состояния в данном эксперименте. Наконец, в области масс выше 1800 МэВ выделен резонанс $a_4(2040)$.

Глава 5. Анализ $\eta\pi^0\pi^0$ -систем, образующихся в зарядовообменной π^-p -реакции при импульсе 100 ГэВ/с

В данной главе, следуя работам [23, 24, 25], представлен анализ спин-четности $\eta\pi^0\pi^0$ -систем, образующихся в зарядовообменной реакции

$$\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0\pi^0n \quad (5.1)$$

при импульсе 100 ГэВ/с, в области масс от 1 до 1.9 ГэВ, где наблюдается несколько псевдоскалярных ($J^{PC} = 0^{-+}$) и аксиально-векторных (1^{++}) мезонов, см. [102]. Ранее результаты парциально-волнового анализа (ПВА) $\eta\pi^+\pi^-$ -системы были опубликованы для реакции $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^+\pi^-n$ при импульсах 8.06 и 8.95 ГэВ/с в КЕК [134]. В π^-p зарядовообменной реакции система $\eta\pi^0\pi^0$ до работ, вошедших в настоящую диссертацию, не изучалась, хотя она, надо отметить, весьма привлекательна для парциально-волнового анализа, поскольку нечетные J^P -волны в $\pi^0\pi^0$ -подсистеме исключаются в силу тождественности π^0 -мезонов, и поэтому число волн, входящих в модель ПВА системы $\eta\pi^0\pi^0$, существенно сокращается по сравнению с системой $\eta\pi^+\pi^-$.

Эксперименты по изучению реакции (5.1) с η - и π^0 -мезонами, распадающимися на два фотона (6 фотонов в конечном состоянии), были проведены в ЦЕРН на многофотонном спектрометре ГАМС-4000 в пучке вторичных π^- -мезонов ускорителя SPS при импульсе 100 ГэВ/с. Расстояние между спектрометром ГАМС и водородной мишенью было выбрано равным 15 м. Общая схема эксперимента, спектрометр ГАМС-4000, калибровка и система обработки данных описаны выше в главе 1. Здесь же мы сконцентрируемся на процедуре ПВА и полученных результатах для системы $\eta\pi^0\pi^0$.

5.1. Отбор $\eta\pi^0\pi^0$ -событий, спектр масс

Выделение $\eta\pi^0\pi^0$ -событий из всех зарегистрированных в эксперименте многофотонных событий (в том числе и событий образования $3\pi^0$ - и $\eta\eta\pi^0$ -систем, распадающихся в конечном счете на фотоны) было осуществлено посредством кинематического анализа 6γ -событий (4С-фит, фиксированы массы нейтрона отдачи, η - и π^0 -мезонов), см. главу 1, а также [135, 136]. В результате более 60 тыс. чистых $\eta\pi^0\pi^0$ -событий было отобрано для дальнейшего анализа. Дополнительный отбор по квадрату переданного импульса, $-t > 0.15$ (ГэВ/с)², был введен, чтобы уменьшить вклад нерезонансного континуума в области масс E/ι -мезона, который представляет здесь наибольший интерес. Спектр масс отобранных таким образом $\eta\pi^0\pi^0$ -событий представлен на Рис. 5.1. Помимо доминирующего пика от η' -мезона два других пика также ясно видны в этом спектре: первый - в области $f_1(1285)$ - и $\eta(1295)$ -мезонов, а второй - в области $f_1(1420)$ - и $\eta(1440)$ -мезонов. При этом, забегая вперед, отметим, что учет эффективности регистрации событий реакции (5.1) форму этого спектра существенно не меняет. Подробнее см. [24].

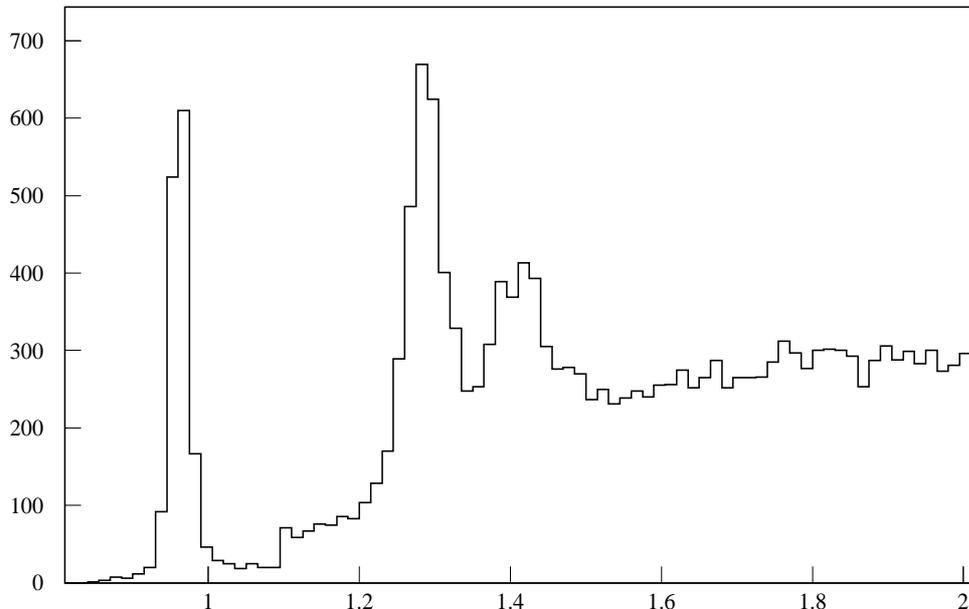


Рис. 5.1: Спектр масс $\eta\pi^0\pi^0$ -систем, образующихся в реакции (5.1) при импульсе 100 ГэВ/с в эксперименте NA12. Здесь и далее $-t > 0.15$ (ГэВ/с)². Количество событий на рисунке в области масс $M_{\eta\pi^0\pi^0} < 1.1$ ГэВ уменьшено в 3 раза по сравнению с реально зарегистрированными в эксперименте.

Парциально-волновой анализ отобранных событий был проведен независимо в 30-МэВ интервалах по массе $\eta\pi^0\pi^0$ -системы в диапазоне 1020 - 1920 МэВ. Он основан на более чем 19 тыс. событий. При этом следует отметить, что в отобранном ансамбле событий резонансы в спектре масс подсистемы $\pi^0\pi^0$ не проявляются, в то время как в спектре $\eta\pi^0$ -подсистемы наблюдаются два четких пика с массами 980 и 1320 МэВ [137]. Они, естественно, согласно их массам и ширинам, отождествляются с промежуточными $a_0(980)$ - и $a_2(1320)$ -мезонами, проявляющимися в подсистеме $\eta\pi^0$.

5.2. Парциально-волновой анализ $\eta\pi^0\pi^0$ -системы

Парциально-волновой анализ $\eta\pi^0\pi^0$ -системы был проведен на основе изобарной модели [138] с использованием представления Земаха [139] для амплитуд распада образующейся трехмезонной системы. В анализе использовались только переменные Далитца для $\eta\pi^0\pi^0$ -системы (см. ниже), а по всем угловым переменным было проведено интегрирование.

В рамках изобарной модели амплитуда распада системы со спин-четностью J^P составляется из квази-двухчастичных амплитуд с использованием спин-тензоров Земаха Z^{J^P} и динамических факторов F^L , которые, как правило, являются функциями Брейта-Вигнера для промежуточных резонансов в двухмезонных подсистемах¹ :

$$A^{J^P} = \sum_k \alpha_k^{J^P} \cdot A_{L_k}^{J^P} = \sum_k \alpha_k^{J^P} \cdot Z_{L_k}^{J^P}(p^{k_1}, p^{k_2}, p^{k_3}) \cdot F_k^{L_k}(p^{k_1}, p^{k_2}), \quad (5.2)$$

где суммирование проводится по парциальным каналам разложения амплитуды A^{J^P} , $\alpha_k^{J^P}$ - комплексная интенсивность элементарной амплитуды $A_{L_k}^{J^P}$,² L_k - относительный угловой момент двухмезонной подсистемы, включающей в себя k_1 - и k_2 -мезоны, а p^{k_i} - импульс k_i -мезона в системе покоя $\eta\pi^0\pi^0$. Ниже эта формула будет уточнена. Амплитуды предполагаются симметричными

¹Здесь и ниже мы предполагаем, что подсистема $\pi^0\pi^0$ образуется в реакции (5.1) с полным изоспином, равным нулю.

²Здесь и ниже используется нормировка амплитуд $\int dm_{13}^2 dm_{23}^2 |Z_{L_k}^{J^P}(p^{k_1}, p^{k_2}, p^{k_3}) \cdot F_k^{L_k}(p^{k_1}, p^{k_2})|^2 = 1$.

относительно π^0 -перестановок. Следует также отметить, что поскольку в методе Земаха проводится интегрирование по угловым переменным, интерференция возникает только между амплитудами с одинаковой спин-четностью системы $\eta\pi^0\pi^0$.

Набор элементарных амплитуд, используемый в парциально-волновом анализе, определяется резонансами (изобарами) в двухмезонных подсистемах, равно как и наивысшим значением спина $\eta\pi^0\pi^0$ -состояний, вклад которых может быть все еще значим в рассматриваемой области масс $\eta\pi^0\pi^0$ -системы. По крайней мере четыре изобары потенциально могут давать значительный вклад в двухмезонные спектры масс: $a_0(980)$ и $a_2(1320)$ в $\eta\pi^0$ -подсистеме и $f_0(980)$, или $(\pi^0\pi^0)_S$,³ и $f_2(1270)$ состояния в $\pi^0\pi^0$ -подсистеме [137]. Что касается высшего значения спина $\eta\pi^0\pi^0$ -системы, то в ПВА были учтены все состояния с $J \leq 2$ [24, 25].

Функции Брейта-Вигнера с табличными значениями параметров резонансов [92] использовались как динамические факторы в уравнении (5.2) для $a_0(980)$ -, $a_2(1320)$ - и $f_2(1270)$ -резонансов, тогда как для описания S -волнового "резонанса" f_0 в подсистеме $\pi^0\pi^0$ использовалась параметризация [140, 141].

5.3. Представление Земаха для амплитуд трехмезонных распадов

Хотя метод Земаха [139] был развит для описания амплитуд трехпионных распадов мезонов, он легко может быть обобщен для описания бесспиновых трехмезонных, см. [142], и, вообще говоря, многомезонных систем. В основе метода лежит понимание того, что амплитуда трехчастичного (многочастичного) распада на бесспиновые частицы может зависеть только от импульсов частиц в конечном состоянии, а также, что конфигурация импульсов частиц в конечном состоянии должна иметь те же трансформационные свойства, что и спин-тензор распавшейся частицы. Для описания амплитуд можно использовать как 3-мерные, так и 4-мерные импульсы частиц в конеч-

³В дальнейшем обозначения $f_0(980)$ и $(\pi^0\pi^0)_S$ мы будем отождествлять, см. подраздел 5.4 ниже.

ном состоянии. Оба подхода эквивалентны. Убедиться в этом можно, если переопределить 4-импульсы вторичных частиц так, чтобы в системе покоя распавшейся частицы они имели вид:

$$P_\mu^k = \{0, \vec{p}^k\}, \quad (5.3)$$

где \vec{p}^k соответствующий 3-импульс частицы k в системе центра масс распавшейся частицы. Во всех других системах отсчета соответствующие 4-векторы P_μ^k получаются из (5.3) при помощи преобразований Лоренца. Преобразование от 4-импульсов частиц к 4-векторам (5.3) можно сразу записать и в ковариантном виде, детали см. в оригинальной работе [139].

Таким образом, из выражения (5.3) ясно видно, что описание в терминах 3-импульсов частиц в системе центра масс $\eta\pi^0\pi^0$ -системы и в терминах 4-импульсов частиц эквивалентны. Поэтому для простоты и наглядности ниже мы будем использовать, в основном, 3-импульсы частиц в указанной системе отсчета. В частности, в случае трехчастичного распада это означает, что имеет место соотношение:

$$\vec{p}^1 + \vec{p}^2 + \vec{p}^3 = 0, \quad (5.4)$$

где применительно к системе $\eta\pi^0\pi^0$ под \vec{p}^1 и \vec{p}^2 мы будем в дальнейшем понимать импульсы первого и второго π^0 -мезонов, а под \vec{p}^3 – импульс η -мезона, соответственно. В результате для описания амплитуд 3-частичного распада на бесспиновые частицы у нас в наличии есть только три линейно-независимых вектора, построенных из 3-импульсов частиц в конечном состоянии:

$$\vec{p}^1, \quad \vec{p}^2, \quad \vec{q} = [\vec{p}^1, \vec{p}^2]. \quad (5.5)$$

При этом \vec{q} имеет иные трансформационные свойства нежели \vec{p}^1 и \vec{p}^2 (он является аксиальным вектором) и может быть поэтому использован вместо одного из импульсов \vec{p}^1 или \vec{p}^2 в тензоре Z^{JP} , чтобы сменить P -четность конечного, например, трехпионного состояния с естественной $P = (-1)^{J+1}$ на неестественную $P = (-1)^J$, имея в виду собственную отрицательную P -четность тройки пионов.

Отметим здесь также, что в дальнейшем для удобства записи амплитуд мы будем наряду с векторами \vec{p}^i использовать и три их линейные комбинации:

$$\vec{t}^l = \vec{p}^i - \vec{p}^j, \quad (5.6)$$

где по индексам частиц l, i, j осуществляется циклическая перестановка, см. [142].

Далее, как уже отмечалось выше (5.2), амплитуда трехпионного распада со спин-четностью начального состояния J^P в рамках метода Земаха представляет собой произведение формфактора F на бесследовый симметричный по любой паре индексов частиц тензор $Z^{JP}(p^1, p^2, \dots, p^J)$ ранга J , построенный из 3-импульсов (5.5). В качестве примера приведем здесь явный вид Z^{JP} тензоров для простейших трехпионных распадов ($J^P = 0^-, 1^+, 1^-$):

$$Z^{0^-} = 1; \quad \vec{Z}_1^{1^+} = \vec{p}^1, \quad \vec{Z}_2^{1^+} = \vec{p}^2; \quad \vec{Z}^{1^-} = \vec{q}, \quad (5.7)$$

а также явный вид спин-тензоров состояний со спином 2, т.е. с $J^P = 2^-$ и 2^+ :

$$Z_{nk}^{2^-} = T_{nk}^2(i, j), \quad Z_{nk}^{2^+} = T_{nk}^2(i, q), \quad (5.8)$$

где n и k - пространственные индексы в 3-мерном пространстве, а тензоры второго ранга $T_{nk}^2(i, j)$ и $T_{nk}^2(i, q)$ определяются, соответственно, уравнениями:

$$T_{nk}^2(i, j) \equiv T_{nk}^2(\vec{p}^i, \vec{p}^j) = p_n^i p_k^j - \frac{1}{3} \delta_{nk} (\vec{p}^i, \vec{p}^j), \quad (5.9)$$

$$T_{nk}^2(i, q) \equiv T_{nk}^2(\vec{p}^i, \vec{q}), \quad (5.10)$$

детали, а также явный вид высших спин-тензоров см. в работе [139].

5.4. Модель ПВА для системы $\eta\pi^0\pi^0$

При проведении ПВА $\eta\pi^0\pi^0$ -системы в области масс до 1.9 ГэВ использовался набор парциальных амплитуд с полным спином $J \leq 2$, который учитывал рождение четырех резонансов в двухмезонных подсистемах: $a_0(980)$ и $a_2(1320)$ в $\eta\pi^0$ -подсистеме, а также $f_0(980)$ и $f_2(1270)$ в $\pi^0\pi^0$ -подсистеме [24].

Соответствующие функции Брейта-Вигнера (BW) с табличными значениями параметров использовались как динамические факторы в уравнении (5.2) для описания $a_0(980)$ -, $a_2(1320)$ - и $f_2(1270)$ -резонансов, а для f_0 использовалась параметризация [140, 141], которая фактически описывает S -волновую амплитуду в $\pi\pi$ -рассеянии с нулевым изоспином.

Собственно модель для анализа системы $\eta\pi^0\pi^0$ аналогична модели ПВА для системы $\pi^-\pi^+\pi^+$, которая подробно рассмотрена в работе [142]. Надо лишь опустить промежуточные векторные состояния в двухпионных подсистемах, учесть тождественность π^0 -мезонов, а также промежуточные двухмезонные резонансы в подсистемах $\pi^0\pi^0$ и $\eta\pi^0$, перечисленные выше. Полученная в результате Таблица 5.1 использованных для ПВА системы $\eta\pi^0\pi^0$ парциальных амплитуд приведена ниже.

В формулах таблицы по повторяющимся пространственным верхним и нижним индексам предполагается суммирование. Запрещенные амплитуды для системы $\eta\pi^0\pi^0$ помечены в примечании. При этом для амплитуд распада мы используем спектроскопические обозначения $J^P xyL$, принятые в изобарной модели. Здесь и ниже J^P - спин-четность системы $\eta\pi^0\pi^0$, x - промежуточный резонанс (изобара), y - непарный мезон и L - угловой момент между x и y . В данной модели ПВА мы ограничились только амплитудами с $L = 0, 1$, т.е. только S и P состояниями в системе xy , см. Табл. 5.1. Что касается функций Брейта-Вигнера, то для резонансов $R = a_0(980), a_2(1320), f_2(1270)$ мы, следуя работе [142], использовали следующую параметризацию:

$$BW(R_l^{ik}) = \left(\frac{m}{q}\right)^{1/2} \frac{\Gamma^{1/2}(m)}{(m^2 - m_R^2) - im_R\Gamma(m)}, \quad \Gamma(m) = \Gamma_R \left(\frac{q}{q_0}\right)^{2l+1}, \quad (5.11)$$

где m - масса подсистемы $\{ik\}$, m_R и Γ_R - табличные значения массы и ширины резонанса R , l - его спин, q - модуль импульса мезона i в системе покоя $\{ik\}$, q_0 - модуль импульса мезона i при массе подсистемы $\{ik\}$, равной табличной массе резонанса R . Для описания S -волны ($\pi^0\pi^0$) $_S$ мы использовали, как уже отмечалось выше, параметризацию [140, 141], сохранив при этом для нее в формулах Таблицы 5.1 обозначение f_0 .

Таблица 5.1: Парциальные амплитуды изобарной модели для системы $\eta\pi^0\pi^0$.

Сост-ние $J^P xyL$	Амплитуда A_{xyL}^{JP}	Прим.
$0^- f_0\eta S$	$BW(f_0^{12})$	
$0^- a_0\pi^0 S$	$BW(a_0^{13}) + BW(a_0^{23})$	
$1^+ f_0\eta P$	$BW(f_0^{12}) \cdot \vec{p}^3$	
$1^+ a_0\pi^0 P$	$BW(a_0^{13}) \cdot \vec{p}^2 + BW(a_0^{23}) \cdot \vec{p}^1$	
$1^+ f_2\eta P$	$BW(f_2^{12}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^3, \vec{t}^3)(\vec{p}^3)^k$	
$1^+ a_2\pi^0 P$	$BW(a_2^{13}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^2, \vec{t}^2)(\vec{p}^2)^k + BW(a_2^{23}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^1, \vec{t}^1)(\vec{p}^1)^k$	
$1^- f_0\eta P$	$BW(f_0^{12}) \cdot \vec{q}$	Запр.
$1^- a_0\pi^0 P$	$(BW(a_0^{13}) + BW(a_0^{23})) \cdot \vec{q}$	Запр.
$2^- f_2\eta S$	$BW(f_2^{12}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^3, \vec{t}^3)$	
$2^- a_2\pi^0 S$	$BW(a_2^{13}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^2, \vec{t}^2) + BW(a_2^{23}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^1, \vec{t}^1)$	
$2^+ f_2\eta P$	$BW(f_2^{12}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^3, \vec{q})$	
$2^+ a_2\pi^0 P$	$BW(a_2^{13}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^2, \vec{q}) + BW(a_2^{23}) \cdot T_{nk}^2(\vec{t}^1, \vec{q})$	

5.5. Процедура фитирования распределений Далитца

Плотность распределения $\eta\pi^0\pi^0$ -событий на диаграмме Далитца может быть представлена в виде:

$$I_o(m_{13}^2, m_{23}^2) = \sum_{JPC} |A^{JP}|^2, \quad (5.12)$$

где амплитуда A^{JP} представляет собой когерентную сумму перечисленных в Табл. 5.1 амплитуд A_{xyL}^{JP} с заданными значением спин-четности:

$$A^{JP} = \sum_{xyL} \alpha_{xyL} \cdot A_{xyL}^{JP}, \quad (5.13)$$

сравни с формулой (5.2). При этом следует отметить, что распределение зарегистрированных событий на диаграмме Далитца (5.12) искажается аппаратной функцией эксперимента. Оно определяется уравнением:

$$I_{acc}(\tilde{m}_{13}^2, \tilde{m}_{23}^2) = \int dm_{13}^2 dm_{23}^2 I_o(m_{13}^2, m_{23}^2) \cdot \varepsilon(m_{13}^2, m_{23}^2) \cdot \varrho(\tilde{m}_{13}^2 - m_{13}^2, \tilde{m}_{23}^2 - m_{23}^2), \quad (5.14)$$

где измеренные в эксперименте переменные помечены тильдой, $\varepsilon(m_{13}^2, m_{23}^2)$ - эффективность регистрации событий с заданными изначальными массами мезонных пар и $\varrho(\tilde{m}_{13}^2 - m_{13}^2, \tilde{m}_{23}^2 - m_{23}^2)$ - функция разрешения спектрометра ГАМС по массе двухмезонных систем в реакции (5.1).

Эффективности регистрации, также как и функция разрешения по массе, были получены методом Монте-Карло для каждого массового интервала $\eta\pi^0\pi^0$ -системы. Эффективность регистрации (около 50% в настоящем эксперименте) является гладкой функцией массы $\eta\pi^0\pi^0$ -системы. Она слабо влияет на результаты ПВА, тогда как учет разрешения спектрометра по массе двухмезонных систем существенно улучшает качество фита распределений Далитца.

Для фитирования распределений Далитца в указанных выше 30 МэВ интервалах по массе системы $\eta\pi^0\pi^0$ был применен метод максимума правдоподобия. Функция правдоподобия P основана на предположении, что число событий в каждом массовом интервале диаграммы Далитца подчинено закону Пуассона:

$$-\ln P = - \sum_{ij} (N_{ij} \ln \mu_{ij} - \mu_{ij}), \quad (5.15)$$

где N_{ij} - число зарегистрированных событий в ij -интервале распределения Далитца, а μ_{ij} - ожидаемое число событий в этом же интервале:

$$\mu_{ij} = \int_{\Delta_{ij}} d\tilde{m}_{13}^2 d\tilde{m}_{23}^2 I_{acc}(\tilde{m}_{13}^2, \tilde{m}_{23}^2). \quad (5.16)$$

Интегрирование здесь проводится по двумерному Δ_{ij} -интервалу распределения Далитца. Собственно само фитирование распределений Далитца осуществлялось независимо в каждом массовом интервале системы $\eta\pi^0\pi^0$ с ис-

пользованием программы MINUIT [79].

Вначале в фит были включены все элементарные амплитуды, упомянутые выше. Затем амплитуды с интенсивностями $|\alpha_k^{J^P}|^2$, сравнимыми с нулем в пределах одного стандартного отклонения, были опущены. В результате только 8 амплитуд были оставлены для окончательного фитирования распределений Далитца в области масс до 1.9 ГэВ: $0^- a_0 \pi^0 S$, $0^- f_0 \eta S$, $1^+ a_0 \pi^0 P$, $1^+ f_0 \eta P$, $1^+ a_2 \pi^0 P$, $1^+ f_2 \eta P$, $2^- a_2 \pi^0 P$ и $2^- f_2 \eta P$ (элементарные амплитуды с промежуточными резонансами a_2 и f_2 были введены в фит только начиная с массы 1.4 ГэВ системы $\eta \pi^0 \pi^0$).

Таким образом, можно считать, что в интервале масс до 1.9 ГэВ при достигнутой статистической обеспеченности эксперимента система $\eta \pi^0 \pi^0$ в модели ПВА с $J \leq 2$ образуется в реакции (5.1) в основном в трех J^P -состояниях: 0^- , 1^+ и 2^- .

5.6. Результаты парциально-волнового анализа

Полученные спектры масс квадратов амплитуд с $J^{PC} = 0^{-+}$, 1^{++} , 2^{-+} представлены на Рис. 5.2. Как видно из рисунка справа, спектр масс квадрата 2^{-+} -амплитуды является гладким, его вклад в область масс E/ι -мезона незначителен по сравнению с вкладом 0^{-+} - и 1^{++} -амплитуд, которые показаны на этом же рисунке слева и в центре, соответственно. Поэтому 2^{-+} -амплитуда в настоящей работе интереса для нас не представляет. Проанализируем 0^{-+} и 1^{++} амплитуды.

В спектре масс квадрата амплитуды с $J^{PC} = 0^{-+}$ проявляются два четких пика при массах 1300 и 1400 МэВ, Рис. 5.2 слева. Первый из них может быть идентифицирован с $\eta(1295)$ -мезоном, а второй — с $\eta(1440)$ -мезоном (изначально $\iota(1420)$). В квадрате 1^{++} -амплитуды, Рис. 5.2 в центре, виден пик в области 1300 МэВ. Его следует идентифицировать с $f_1(1285)$ -мезоном (изначально $D(1285)$ -мезон). Других явных пиков в указанных спектрах не наблюдается.

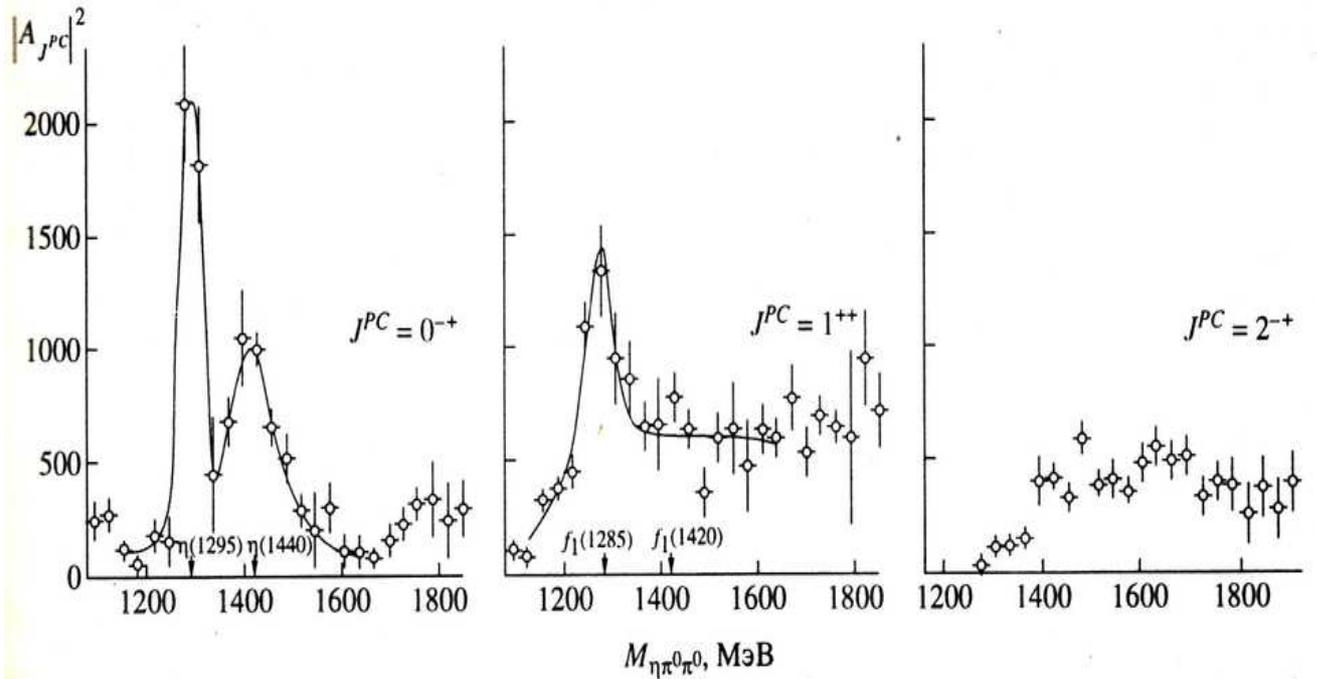


Рис. 5.2: Спектры масс квадратов J^{PC} -амплитуд: 0^{-+} (слева), 1^{++} (в центре) и 2^{-+} (справа). Здесь и на следующем рисунке вертикальная шкала показывает число событий, поправленное на эффективность, в 30-МэВ массовых интервалах. Стрелками указаны табличные значения масс $\eta(1295)$, $\iota/\eta(1440)$, $f_1(1285)$ и $f_1(1420)$ -мезонов [92]. Фитирующие кривые со свободными параметрами резонансов описаны в тексте ниже.

Спектры масс доминирующих $J^P xyL$ -амплитуд представлены на Рис.5.3. В них ясно видны пики $\eta(1295)$ -, $\iota/\eta(1440)$ - и $f_1(1285)$ -мезонов. Что же касается $f_1(1420)$ -мезона, то хотя он и не проявляется в спектре масс квадрата суммарной 1^{++} -амплитуды, Рис. 5.2, его пик тем не менее, ясно виден в спектре квадрата $1^+ a_0 \pi^0 P$ -амплитуды в области 1420 МэВ, см. Рис. 5.3 справа.

Сравнение Рис. 5.2 и 5.3 показывает, что в распаде $\eta(1295) \rightarrow \eta \pi^0 \pi^0$ доминирует канал $a_0(980) \pi^0$, несмотря на его очень ограниченный фазовый объем. Распад же $\iota/\eta(1440) \rightarrow a_0(980) \pi^0$ напротив является весьма слабым (хотя его фазовый объем в два раза больше), но доминирует канал $f_0 \eta$ в распаде $\iota/\eta(1440)$ -мезона на $\eta \pi^0 \pi^0$. Это является сильным аргументом в пользу глюонной природы $\iota/\eta(1440)$ -мезона: gg -пара сильно связана как с S -волновой $\pi\pi$ -системой, так и с η -мезоном [143, 144, 145, 147], - и поэтому распад на $\eta(\pi\pi)_S$ должен быть усилен для мезонов, содержащих валентные глюоны (глоболы, гибриды).

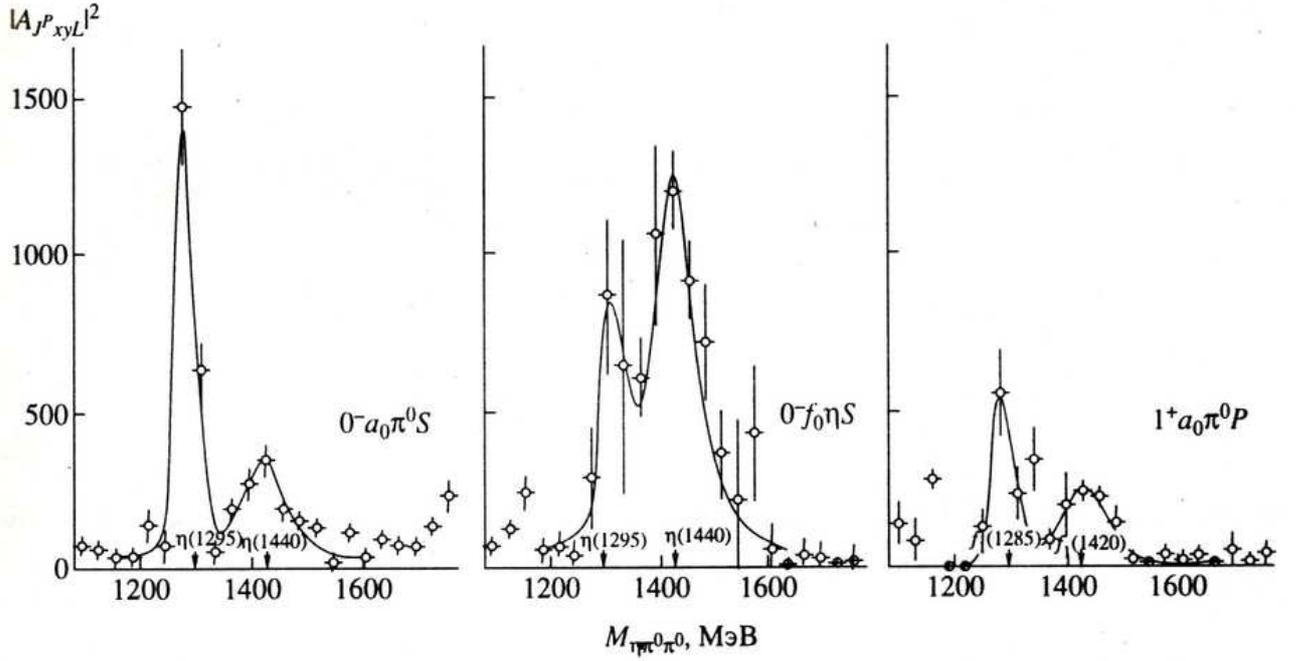


Рис. 5.3: Спектр квадратов $J^P xyL$ -амплитуд в зависимости от массы системы $\eta\pi^0\pi^0$: $0^- a_0\pi^0 S$ (слева), $0^- f_0\eta S$ (в центре) и $1^+ a_0\pi^0 P$ (справа). Стрелками показаны массы $\eta(1295)$ -, $\eta(1440)$ -, $f_1(1285)$ - и $f_1(1420)$ -мезонов, см. [25]

Спектры масс на Рис. 5.2 были профитированы тремя функциями Брейта-Вигнера (свернутыми с функцией разрешения спектрометра по массе) и некогерентным полиномиальным континуумом. Полученные параметры резонансов представлены в Табл. 5.2. Они согласуются со средними мировыми значениями в таблице частиц, см. [92]. Ширина $\eta(1295)$ -мезона обусловлена, в основном, аппаратным разрешением. Для нее получена верхняя граничная оценка на 90%-ом уровне достоверности, см. Табл. 5.2. Вклад различных каналов в распады указанных выше резонансов на $\eta\pi^0\pi^0$

$$R(k/\eta\pi^0\pi^0) = \frac{|\alpha_{J^P C}^k|^2}{\sum_n |\alpha_{J^P C}^n|^2} \quad (5.17)$$

был оценен, исходя из массовых спектров квадратов $J^P xyL$ -амплитуд, представленных на Рис. 5.3. Три функции Брейта-Вигнера с параметрами, статистически согласующимися с табличными величинами для $\eta(1295)$ -, $\eta(1440)$ - и $f_1(1285)$ -мезонов [92], были использованы для фитирования этих спектров. Полученные значения отношения $R(a_0\pi^0/\eta\pi^0\pi^0)$ для указанных мезонов представлены в Табл. 5.3. При этом интересно отметить, что как видно

Таблица 5.2: Параметры резонансов, полученные при фите квадратов амплитуд на Рис. 5.2 и 5.3, подробности см. в основном тексте.

Мезоны	J^{PC}	Масса в МэВ	Ширина в МэВ
$\eta(1295)$	0^{-+}	1299 ± 4	$< 40, \quad 90\% \text{ CL}$
$\iota/\eta(1440)$	0^{-+}	1424 ± 6	85 ± 18
$f_1(1285)$	1^{++}	1284 ± 6	55 ± 18
$f_1(1420)$	1^{++}	1435 ± 9	90 ± 25

Таблица 5.3: Измеренные в эксперименте относительные вероятности (5.17) распадов мезонов, распадающихся в конечном счете на $\eta\pi^0\pi^0$.

Мезон	$R(a_0\pi^0/\eta\pi^0\pi^0)$	$R(f_0\eta/\eta\pi^0\pi^0)$
$\eta(1295)$	0.65 ± 0.10	0.35 ± 0.10
$\iota/\eta(1440)$	0.19 ± 0.04	0.81 ± 0.04
$f_1(1285)$	0.28 ± 0.07	—
$f_1(1420)$	$> 0.3, \quad 90\% \text{ CL}$	—

из этой таблицы, отношение интенсивностей двух мод распада для $\iota/\eta(1440)$ -мезона,

$$BR(\iota \rightarrow \eta(\pi^0\pi^0)_S)/BR(\iota \rightarrow a_0\pi^0, a_0 \rightarrow \eta\pi^0) = 4.3 \pm 1.2, \quad (5.18)$$

на порядок величины больше аналогичного отношения для $\eta(1295)$ -мезона, которое равно 0.54 ± 0.22 .

Наконец, что касается $f_1(1420)$ -мезона, его параметры были определены в результате фита функцией Брейта-Вигнера только спектра масс квадрата амплитуды $1^+a_0\pi^0P$ волны, Рис. 5.3 справа. Они также приведены в Табл. 5.2. Полученные параметры хорошо согласуются с табличными значениями для $f_1(1420)$ -мезона [148]. Особенностью описываемого эксперимента

является то, что резонанс $f_1(1420)$ наблюдается здесь исключительно в моде распада на $a_0(980)\pi^0$. Оценка вероятности распада $f_1(1420) \rightarrow a_0(980)\pi^0$ на основе спектров на Рис. 5.2 и 5.3 приведена в Табл. 5.3, подробнее см. [25].

5.7. Сечения образования резонансов

Сечения образования резонансов в реакции (5.1) были определены путем нормировки на сечение рождения $\eta'(958)$ -мезона, образующегося в этой же реакции, см. пик слева на Рис. 5.1:

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow \eta' n) \cdot BR(\eta' \rightarrow \eta\pi^0\pi^0) = 42 \pm 6 \text{ nb}$$

при импульсе 100 ГэВ/с и $-t > 0.15 \text{ (ГэВ/с)}^2$, которое следует из работ [91, 92, 146]. Полученные в результате сечения рождения резонансов равны:

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow \eta(1295)n) \cdot BR(\eta(1295) \rightarrow \eta\pi^0\pi^0) = 12 \pm 3 \text{ nb (2100 events)},$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow \eta(1440)n) \cdot BR(\eta(1440) \rightarrow \eta\pi^0\pi^0) = 12 \pm 3 \text{ nb (2200 events)}, \quad (5.19)$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_1(1285)n) \cdot BR(f_1(1285) \rightarrow \eta\pi^0\pi^0) = 8 \pm 2 \text{ nb (1400 events)},$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_1(1420)n) \cdot BR(f_1(1420) \rightarrow \eta\pi^0\pi^0) = 2 \pm 0.8 \text{ nb (400 events)},$$

где, скажем, под $BR(f_1(1420) \rightarrow \eta\pi^0\pi^0)$ понимается вероятность распада $f_1(1420)$ в конечном счете на $\eta\pi^0\pi^0$ с учетом парциальных вероятностей промежуточных состояний, т.е.

$$BR(f_1(1420) \rightarrow \eta\pi^0\pi^0) = BR(f_1(1420) \rightarrow a_0(980)\pi^0) \cdot BR(a_0(980) \rightarrow \eta\pi^0).$$

Если промежуточных состояний несколько, то по ним проводится когерентное суммирование.

5.8. Краткие итоги

Суммируя результаты ПВА, представленные в данной главе, мы отмечаем, что в реакции $\pi^- p \rightarrow \eta\pi^0\pi^0 n$ при импульсе 100 ГэВ/с и квадрате

переданного импульса $-t > 0.15$ (ГэВ/с)² наблюдаются четкие сигналы (пики) от распадов $\eta(1295)$ -, $\iota/\eta(1440)$ -, $f_1(1285)$ - и $f_1(1420)$ -мезонов в спектрах масс квадратов соответствующих J^{PC} -амплитуд. Измеренные параметры резонансов находятся в согласии с табличными значениями [148]. В распаде $\eta(1295) \rightarrow \eta\pi^o\pi^o$ доминирует канал $a_0(980)\pi^o$, в то время как этот канал является слабым в случае $\iota/\eta(1440)$ -мезона (несмотря на значительно больший фазовый объем, доступный в случае распада $\iota/\eta(1440)$ -мезона), где доминирует распадный канал $\eta(\pi^o\pi^o)_S$. Что же касается $f_1(1420)$ -мезона, то он наблюдается исключительно в канале распада на $a_0(980)\pi^o$.

Глава 6. Изучение $4\pi^0$ -системы

В шестой главе, следуя работам [14, 28, 29], представлены результаты анализа системы $4\pi^0$, образующейся в зарядовообменной реакции:

$$\begin{aligned} \pi^- p &\rightarrow X^0 n \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 4\pi^0 \rightarrow 8\gamma, \end{aligned} \quad (6.1)$$

при импульсах 38 и 100 ГэВ/с. Впервые данные о резонансных состояниях в системе $4\pi^0$, образующихся в указанной реакции были получены в рамках эксперимента NA12 [28] при импульсе 100 ГэВ/с. Распад резонансов по каналу $4\pi^0$ представляет большой интерес, так как он чувствителен к внутренней структуре распадающихся по этому каналу частиц. Для обычных $q\bar{q}$ -мезонов распад $X^0 \rightarrow 4\pi^0$ является редким ($BR \sim 10^{-2}$) по сравнению с другими (заряженными) каналами распада на 4π , которые усилены за счет промежуточных ρ -мезонов: $X^0 \rightarrow \rho\rho \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$, $\pi^+\pi^-2\pi^0$. В то же время для глобальных (двухглюонных) состояний G относительная вероятность распада $G \rightarrow 4\pi^0$ может достигать 10%, благодаря механизму глюонного обесцвечивания (см. [145, 149]), поскольку, в этом случае отсутствует указанное ρ -усиление заряженных 4π -каналов.

Эксперименты по изучению $4\pi^0$ -системы были выполнены при импульсах 38 и 100 ГэВ/с на π^- -пучках ускорителей ИФВЭ [14] и ЦЕРН [28, 29], соответственно, с использованием многофотонных спектрометров ГАМС-2000 и ГАМС-4000. При этом расстояние от мишени до спектрометра ГАМС-2000 было равно 4.3 м, а расстояние от мишени до ГАМС-4000 было 15 м. Оба эксперимента уже достаточно подробно описаны в предыдущих главах, поэтому здесь мы остановимся, в основном, на методике отбора $4\pi^0$ -событий, анализе измеренных угловых распределений в реакции (6.1) и полученных физических результатах. В этой связи также следует отметить, что обработ-

ка данных при 38 и 100 ГэВ/с проводилась, практически, с использованием одних и тех же программ и критериев отбора, и поэтому ниже мы, как правило, не будем делать особого различия между ними.

6.1. Отбор $4\pi^0$ -событий

Система $4\pi^0$ выделялась из ансамбля реконструированных 8γ -событий при помощи кинематического 5С-фита ($CL(5C-fit) > 0.1$), фиксировались массы нейтральных пионов и масса нейтрона в конечном состоянии реакции (6.1)) и нескольких последующих отборов, см. ниже. Для иллюстрации чистоты отобранных посредством кинематического фита $4\pi^0$ -событий на Рис. 6.1а (слева) в качестве примера приведен спектр инвариантных масс четвертой пары фотонов для событий при импульсе пучка 38 ГэВ/с, в которых первые три пары фотонов были идентифицированы как π^0 -мезоны посредством 4С-фита (четвертая пара фотонов при этом не фитировалась). Как видно из этого рисунка, уровень фона в отобранных $4\pi^0$ -событиях при импульсе 38 ГэВ/с не превышает 12% (уровень фона под пиком π^0 -мезона на указанном рисунке).

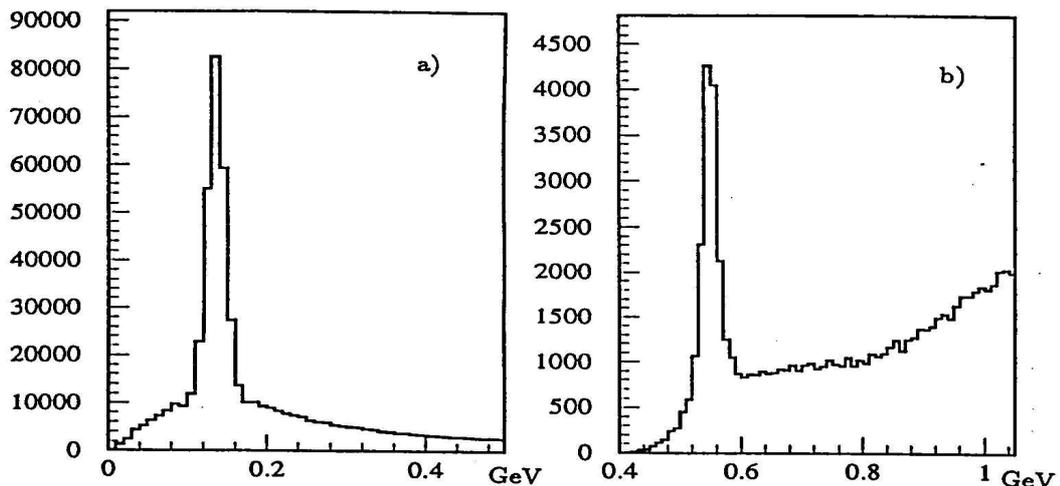


Рис. 6.1: а) Спектр инвариантных масс четвертой пары фотонов для событий, в которых первые три пары фотонов были идентифицированы как π^0 -мезоны (4С-фит, см. основной текст); б) спектр масс $3\pi^0$ -подсистем, образующихся в реакции $\pi^-p \rightarrow 4\pi^0n$ (5С-фит), четыре входа на событие. Импульс пучка 38 ГэВ/с, [14].

События реакции (6.2) не использовались в дальнейшем анализе, а именно были отброшены все события (6.1) в которых хотя бы одна подсистема $3\pi^0$ из четырех возможных имела массу в области η -мезона $[490,610]$ МэВ, см. Рис. 6.1b и 6.2b. Спектр масс $4\pi^0$ -систем для отобранных в результате событий при импульсе 38 ГэВ/с представлен на Рис. 6.3a (слева), а также в центре (Рис. 6.3b), но с дополнительным отбором по квадрату переданного импульса $4\pi^0$ -системе: $-t < 0.15$ (ГэВ/с)². Спектр масс $4\pi^0$ -систем при импульсе 100 ГэВ/с и $-t < 0.15$ (ГэВ/с)² показан на этом же рисунке справа. Качественно представленные спектры $4\pi^0$ -масс при импульсах 38 и 100 ГэВ/с весьма похожи. В них наблюдаются структуры в области масс $f_2(1270)$ - и $G(1590)/f_0(1500)$ -мезонов, а также пик, соответствующий образованию состояния с массой ~ 1800 МэВ.

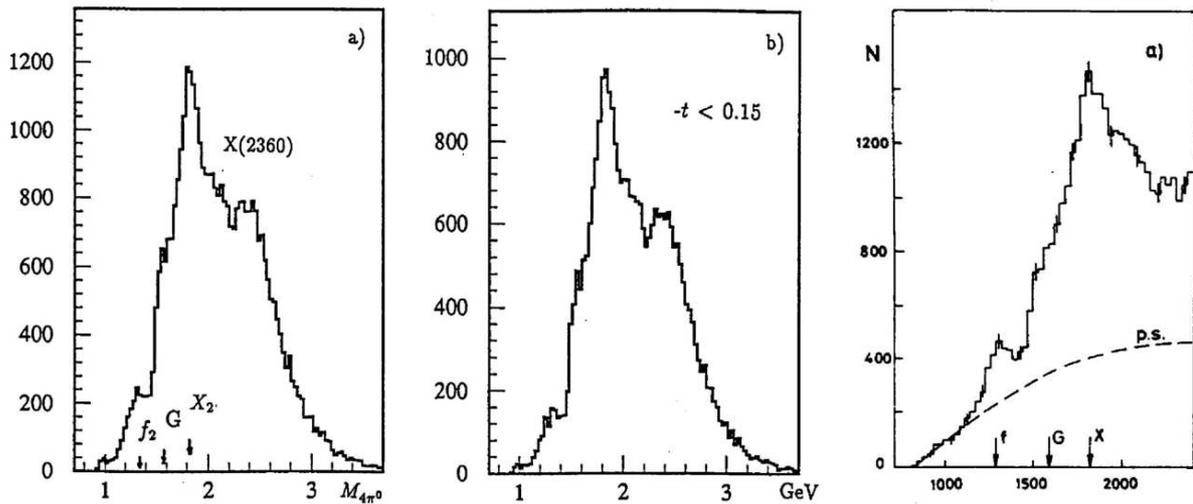


Рис. 6.3: Спектры инвариантных масс $4\pi^0$ -системы в реакции $\pi^- p \rightarrow 4\pi^0 n$: а) при импульсе 38 ГэВ/с, б) при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.15$ (ГэВ/с)², в) при импульсе 100 ГэВ/с и $-t < 0.15$ (ГэВ/с)², штриховой линией здесь показан фазовый объем системы $4\pi^0$.

Моделирование методом Монте-Карло показало, что возможный фон от реакции $\pi^- p \rightarrow K_S^0 K_S^0 n$ максимален в области $f_2(1270)$ -мезона, где он не превышает 5% от числа событий прямого образования $4\pi^0$ -систем без учета указанного отбора по квадрату переданного импульса t . Отбор по t был введен, чтобы обогатить ансамбль подлежащих дальнейшей обработке событий процессами однопионного рождения резонансов, что и было достигнуто

ценой 20% потери статистики, см. Рис. 6.3 а и в. При этом надо отметить, что однопионный обмен (ОРЕ) доминирует во всей области масс $4\pi^0$ -систем, что иллюстрируется Рис. 6.4 (первые три гистограммы слева), где приведены t -распределения в областях масс $4\pi^0$ -систем, соответствующих образованию $f_2(1270)$ -, $G(1590)/f_0(1500)$ - и $X(1810)$ -резонансов. Доминантность ОРЕ является весьма существенным фактором для последующего анализа угловых распределений событий в реакции (6.1), подробнее см. ниже.

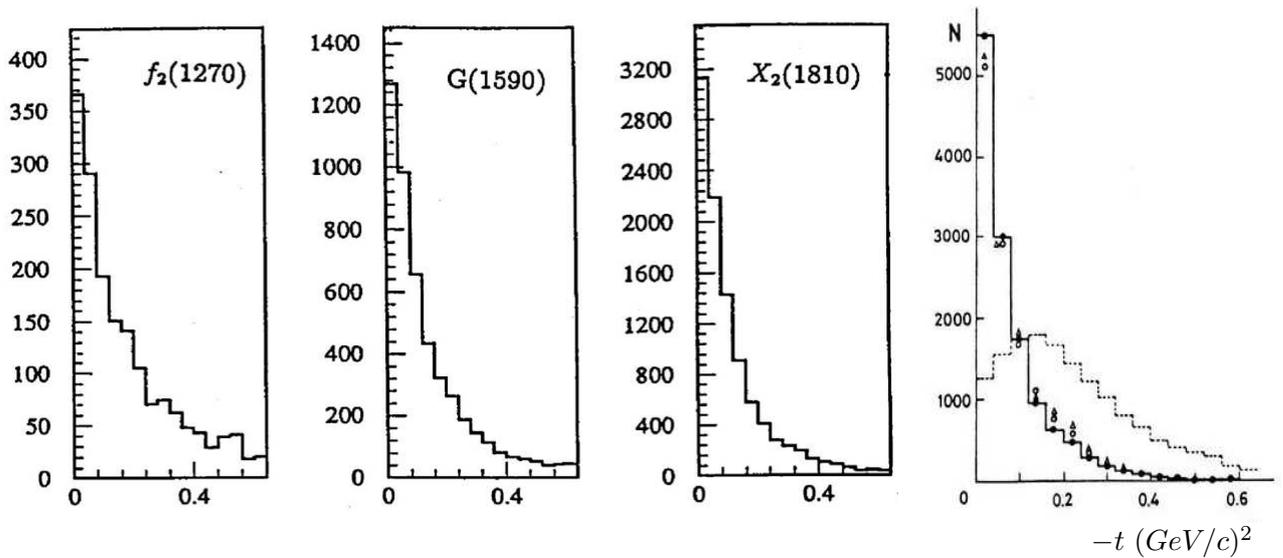


Рис. 6.4: Распределения по квадрату переданного импульса t в реакции (6.1) при импульсе 38 ГэВ/с в областях масс $4\pi^0$ -системы, соответствующих образованию $f_2(1270)$ -, $G(1590)/f_0(1500)$ - и $X(1810)$ -мезонов (первые три гистограммы слева) и при импульсе 100 ГэВ/с (гистограмма справа) в этих же областях масс $4\pi^0$ -системы (сплошная линия) в сравнении с t -распределением в области масс $4\pi^0$ -систем, соответствующей образованию $a_2(1320)$ -мезона в реакции (6.2) (штриховая линия).

Дополнительно отбор $-t < 0.15$ $(\text{ГэВ}/c)^2$ усиливает также и подавление реакции образования $\eta\pi^0$ -системы, что иллюстрируется тремя рисунками слева, Рис. 6.4, где показаны t распределения для событий реакции прямого образования $4\pi^0$ -систем в области масс $f_2(1270)$ -, $G(1590)/f_0(1500)$ - и $X(1810)$ -резонансов при импульсе 38 ГэВ/с (сплошные линии), а также такое (справа на Рис. 6.4) для событий при импульсе 100 ГэВ/с, идентифицированных как образовавшихся в результате процесса $a_2(1320) \rightarrow \eta\pi^0 \rightarrow 3\pi^0 + \pi^0$ (пунктирная линия на этом рисунке), по сравнению с t -распределением для $4\pi^0$ -систем (сплошная гистограмма на рисунке). При этом события $a_2(1320)$ -

мезона были выделены в результате отбора по массе $\eta\pi^0$ -системы.

6.2. Феноменологические амплитуды распада $4\pi^0$ -системы

В предыдущей главе мы провели парциально-волновой анализ системы $\eta\pi^0\pi^0$ методом Земаха. Здесь мы обобщим указанный метод на четырехмезонные и, вообще говоря, многомезонные системы бесспиновых частиц в конечном состоянии реакции. Альтернативный, но идеологически очень близкий, подход состоит в том, чтобы вначале построить спин-тензор $T_{k_1 k_2 \dots k_J}^{JMP}$ ранга J в трехмерном пространстве¹ посредством суммирования спин-тензоров первого ранга T_k^{1M} при помощи коэффициентов Клебша-Гордона (здесь M - это проекция спина распавшейся частицы на третью ось, k - пространственные индексы тензора: $k = 1, 2, 3$), а затем спроектировать этот тензор на пространство 3-импульсов выбранной для анализа системы частиц. В нашем случае это система $4\pi^0$ в конечном состоянии реакции (6.1). Естественно, все тензоры и векторы рассматриваются в системе покоя $4\pi^0$. При этом как и в предыдущей главе аксиальный вектор \vec{q} , см. (5.5), используется вместо одного из импульсов частиц в конечном состоянии реакции, чтобы записать амплитуду распада состояния с противоположной пространственной четностью P .

Явный вид тензоров первого ранга T_k^{1M} ($M = -1, 0, +1$) хорошо известен, см., например, [150]:

$$T^{1-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0), \quad T^{10} = (0, 0, 1), \quad T^{1+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0). \quad (6.3)$$

Их также можно получить и из выражения для амплитуды распада векторной частицы на две бесспиновые частицы через сферические функции

$$U_{00}^{1M} = D_{0M}^{1*}(\phi, \theta, -\phi)U_{00}^1 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^M(\theta, \phi)U_{00}^1, \quad (6.4)$$

подробнее см. в [151].

Воспользовавшись далее коэффициентами Клебша-Гордона, мы теперь легко можем найти явный вид спин-тензора $T_{k_1 k_2}^{2M}$ для частицы со спином 2 и

¹Пока это не существенно мы будем опускать ниже P -четность тензора, полагая $T_{k_1 k_2 \dots k_J}^{JMP} \equiv T_{k_1 k_2 \dots k_J}^{JM}$.

далее для частиц с любым целым спином J , последовательно добавляя еще и еще один спин-тензор T_k^{1M} и проводя соответствующее суммирование при помощи коэффициентов Клебша-Гордона. Для полноты изложения приведем здесь явный вид спин-тензоров ранга 2, т.е. $T_{k_1 k_2}^{2M}$:

$$T^{2\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \pm i & 0 \\ \pm i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{2\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & -i \\ \mp 1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{20} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Использование тензоров $T_{k_1 k_2 \dots k_J}^{JM}$ по сравнению с тензорами Земаха $Z_{i_1 i_2 \dots i_J}^{JP}$ имеет то преимущество, что позволяют явным образом учитывать поляризацию распавшейся частицы (в оригинальном методе Земаха сразу проведено суммирование по поляризациям распавшейся частицы).

Полная амплитуда состояния 2^{M+} применительно к $4\pi^0$ -системе записывается тогда в виде:

$$A^{2M+} = \sum_{ij} T_{k_1 k_2}^{2M} (\vec{p}^i)^{k_1} (\vec{p}^j)^{k_2} \cdot F^{2M}(p^1, p^2, p^3, p^4) \quad (6.6)$$

подобно (5.2), где $F^{2M}(p^1, p^2, p^3, p^4)$ — скалярная структурная функция, соответствующая состоянию 2^{M+} , а суммирование проводится здесь по повторяющимся вверху и внизу пространственным индексам k , а также по всем возможным комбинациям $\{ij\}$ 3-импульсов частиц в конечном состоянии системы $4\pi^0$. Приведем здесь для полноты также и явный вид амплитуды 0^{00+} :

$$A^{00+} = F^{00}(p^1, p^2, p^3, p^4). \quad (6.7)$$

В силу тождественности любой пары π^0 -мезонов структурные функции F^{00} и F^{2M} должны быть симметричны при перестановке любой пары импульсов частиц в конечном состоянии. По этой же причине в амплитуды $4\pi^0$ -распада не могут входить аксиальные векторы типа \vec{q} , см. (5.5), а полный спин системы — всегда четный, что в свою очередь означает, что пространственная четность системы $4\pi^0$ всегда положительна³.

²В аргументах скалярных функций $F^{JM}(p^1, p^2, p^3, p^4)$ мы будем опускать знак вектора над импульсами, чтобы подчеркнуть, что скалярные функции могут зависеть только от скалярных величин типа переменных Далитца.

³Строго говоря, это не совсем так, однако примесь $4\pi^0$ -состояний с отрицательной P-четностью можно оценить на уровне не выше 0.1%, и поэтому этими эффектами мы здесь и ниже пренебрегаем.

6.3. Анализ угловых распределений в $4\pi^0$ -системе

Анализ угловых распределений в системе $4\pi^0$, образующейся в реакции (6.1) при импульсах 38 и 100 ГэВ/с, был проведен в области масс до 2.5 ГэВ с привлечением $J^{MP} = 0^{0+}$ и 2^{M+} амплитуд. Учитывая, что в ансамбле отобранных событий, см. выше, доминирует однопионный обмен, в системе Готтфрида-Джексона мы имеем дальнейшие полезные упрощения, а именно из пяти возможных состояний 2^{M+} в реакции с доминирующим однопионным обменом система $4\pi^0$ образуется только в состоянии 2^{0+} . Это сразу позволяет записать явный вид амплитуды со спином 2:

$$A^{20}(4\pi^0) = A^{20+}(4\pi^0) = F^{20}(p^1, p^2, p^3, p^4) \cdot Z^{20}(\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3, \vec{p}^4), \quad (6.8)$$

где угловая зависимость амплитуды описывается вторым сомножителем Z^{20} , явный вид которого легко вычисляется из выражения (6.5) для T^{20} :

$$Z^{20}(\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3, \vec{p}^4) = \sum_{j<i} T_{k_1 k_2}^{20} (\vec{p}^i)^{k_1} (\vec{p}^j)^{k_2} = \sum_{j<i} \frac{3p_z^i p_z^j - (\vec{p}^i \vec{p}^j)}{\sqrt{6}}. \quad (6.9)$$

Однако особо элегантный вид угловая часть амплитуды Z^{20} приобретает, если ввести, следуя в работе [29], угол θ_{Ob} :

$$\cos^2 \theta_{Ob} = \frac{\sum_{j<i} (\vec{p}^{ij})^2 \cos^2 \theta_{ij}}{\sum_{j<i} (\vec{p}^{ij})^2}, \quad (6.10)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, $\vec{p}^{ij} = \vec{p}^i + \vec{p}^j$ и $\cos \theta_{ij} = (\vec{e}_z \vec{p}^{ij}) / |\vec{p}^{ij}|$. Тогда угловая часть амплитуды $A^{20}(4\pi^0)$ приобретает вид

$$Z^{20}(\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3, \vec{p}^4) = \frac{(3\cos^2 \theta_{Ob} - 1)}{\sqrt{6}} \cdot \sum_{j<i} (\vec{p}^{ij})^2, \quad (6.11)$$

подобный амплитуде двухпионного распада состояния со спином 2, где полярный угол $\cos \theta_{GJ}$ вылета пиона в системе Готтфрида-Джексона попросту заменен на угол $\cos \theta_{Ob}$ (6.10), также определенный в системе Готтфрида-Джексона.

Наконец отметим здесь, что ниже мы будем анализировать только угловые переменные в системе $4\pi^0$, а поэтому явный вид скалярных функций

F^{JM} не имеет для нас значения, поскольку по аргументам этих функций ниже будет проведено интегрирование.

6.4. Анализ реакции $\pi^- p \rightarrow 4\pi^0 n$ при импульсе 100 ГэВ/с

Анализ спин-четности $4\pi^0$ -состояний, образовавшихся в реакции (6.1) при импульсе 100 ГэВ/с, был проведен при помощи серии отборов по симметризованному углу $4\pi^0$ -распада $\cos \theta_{Ob}$, см. уравнение (6.10) выше. Отборы были подобраны так, чтобы в различной степени подавлять регистрацию $J^P = 0^+$ и 2^+ состояний, имеющих существенно различные плотности вероятности по $\cos \theta_{Ob}$ в системе Готтфрида-Джексона: состояние 0^+ имеет равномерное распределение вероятности без учета фазового объема, а состояние 2^+ — пропорциональное квадрату полинома Лежандра 2-й степени по $\cos \theta_{Ob}$, см. уравнение (6.11). Монте-Карло (МК) моделирование позволило зафиксировать следующие отборы: $\cos \theta_{Ob} < 0.4$ и $\cos \theta_{Ob} > 0.5$, — которые благоприятны для наблюдения $4\pi^0$ -состояний с $J^P = 2^+$ и $J^P = 0^+$, соответственно. Спектры масс отобранных в результате ансамблей событий приведены на Рис.6.5. При обоих отборах в указанных спектрах масс наблюдаются

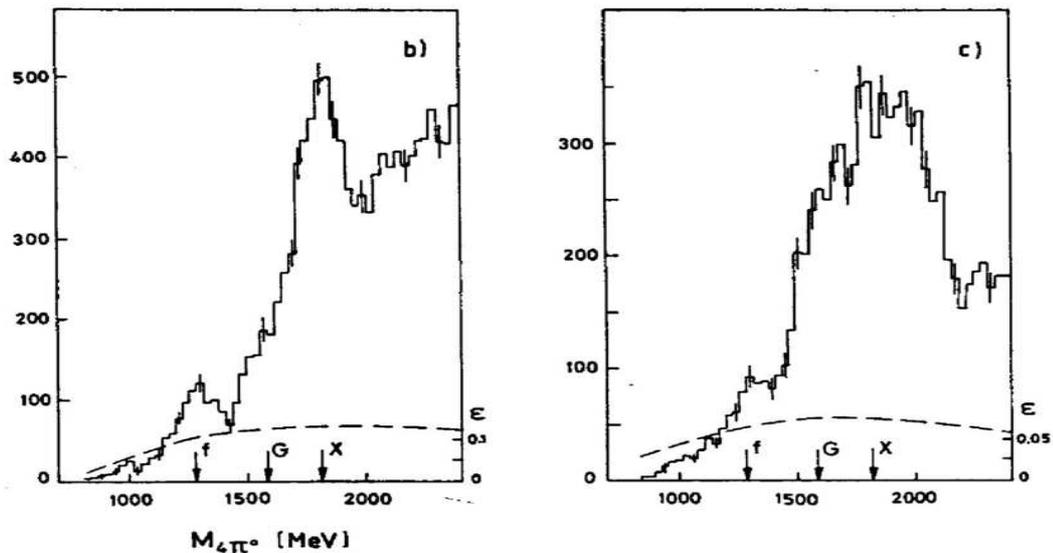


Рис. 6.5: Спектры инвариантных масс $4\pi^0$ -системы в реакции $\pi^- p \rightarrow 4\pi^0 n$ при импульсе 100 ГэВ/с: b) $\cos \theta_{Ob} < 0.4$, отбор выделяет состояния с $J^P = 2^+$; c) $\cos \theta_{Ob} > 0.5$, отбор выделяет состояния с $J^P = 0^+$; штриховыми линиями показано распределение по фазовому объему $4\pi^0$ -системы.

пики от $f_2(1270)$ -, $G(1590)$ - и $X_2(1810)$ - резонансов (на рисунках положения резонансов показаны стрелочками), однако с разным соотношением числа событий в этих пиках. Последующая идентификация резонансов по их параметрам была проведена по результатам фита указанных выше спектров масс функциями Брейта-Вигнера и полиномиальным фоном.

Прежде чем переходить к количественным оценкам по спектрам масс на Рис. 6.5, следует отметить высокую степень комбинаторики, обнаруженную при проведении 5С-фита событий реакции (6.1): в сумме перебирается 105 комбинаций фотонов на одно событие. Причем, если в качестве истинной комбинации фотонов, т.е. имеющей наименьший χ^2 из 105 возможных, будет взята топологически ложная комбинация в событии, то угол $\cos\theta_{Ob}$ для таких событий будет заметно искажен. Расчеты методом МК показали, что в 30% событий при проведении 5С-фита имеют место две комбинации с $CL(5C-fit) > 0.1$, что приводит в половине таких событий к существенному искажению импульсов пионов и, соответственно, угла $\cos\theta_{Ob}$. Поэтому такие события из дальнейшей обработки были отброшены.

На Рис. 6.6 представлены спектры масс $4\pi^0$ -систем, для ансамблей событий с $\cos\theta_{Ob} < 0.4$ и $\cos\theta_{Ob} > 0.5$, имеющих в результате кинематического фита (в отличие от спектров событий на Рис. 6.5) только одну комбинацию фотонов с $CL(5C-fit) > 0.1$. Эти спектры были профитированы тремя функциями Брейта-Вигнера и полиномиальным фоном. На верхних рисунках, см. Рис. 6.6, сплошной линией показаны результирующие фитирующие кривые, а фон при этом показан штриховыми линиями, в то время как на нижних рисунках фон вычтен, и теперь ясно видны три резонансные кривые, хорошо статистически обеспеченные и соответствующие наблюдению резонансов $f_2(1270)$, $G(1590)$ и $X_2(1810)$. Полученные параметры резонансов приведены в Табл. 6.1.

Монте-Карло моделирование показало, что при введении указанных выше отборов по углу $\cos\theta_{Ob}$ спектр масс в области $G(1590)$ -мезона трансформируется так, как это должно быть для скалярной частицы, в то время как

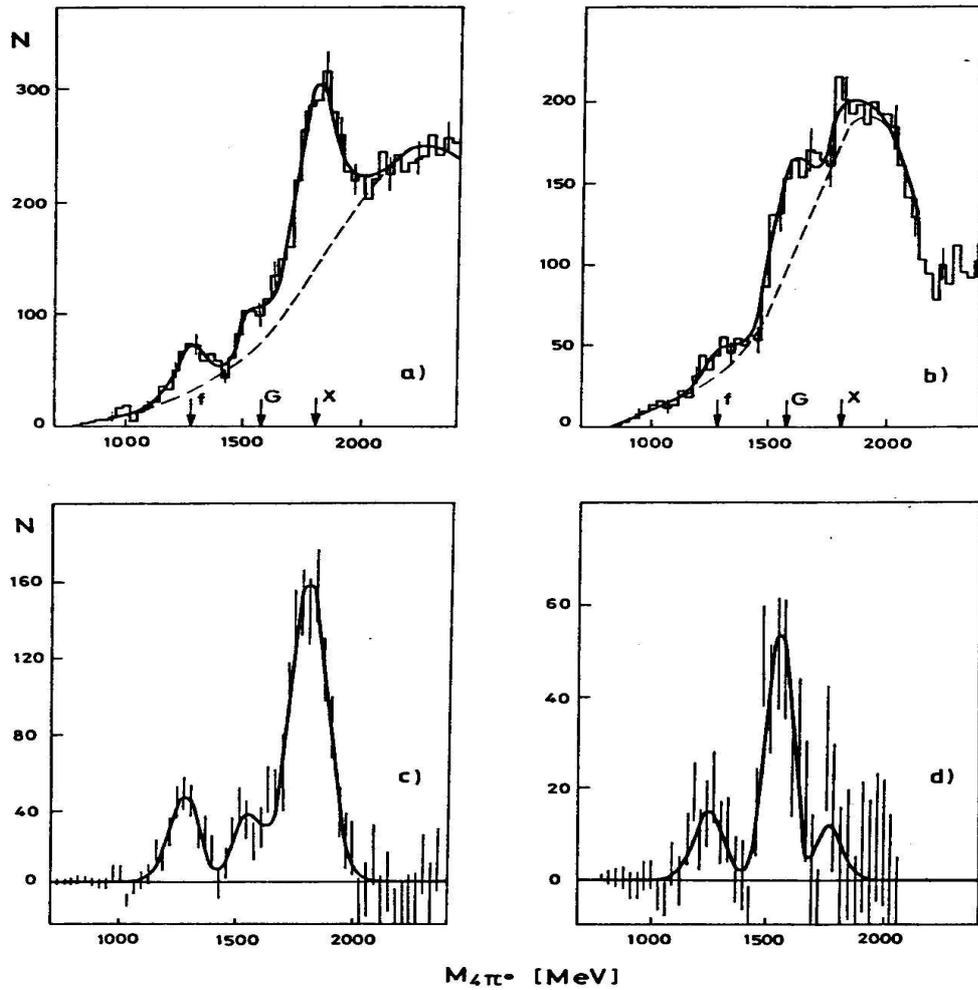


Рис. 6.6: Фит спектров инвариантных масс $4\pi^0$ -систем в событиях реакции $\pi^-p \rightarrow 4\pi^0n$ при импульсе 100 ГэВ/с и $-t < 0.15$ (ГэВ/с)², имеющих только одну комбинацию фотонов с $CL(5C-fit) > 0.1$, тремя функциями Брейта-Вигнера и полиномиальным фоном (сплошная линия), при этом фон показан штриховой линией: *a)* $\cos\theta_{Ob} < 0.4$ (отбор выделяет состояния с $J^P = 2^+$); *b)* $\cos\theta_{Ob} > 0.5$ (отбор выделяет состояния с $J^P = 0^+$.); *c)* и *d)* то же, что и на рисунках *a)* и *b)*, но за вычетом соответствующего полиномиального фона.

в области масс $f_2(1270)$ - и $X_2(1810)$ -резонансов — как это должно быть для тензорных состояний, что однозначно свидетельствует о правильности приписывания спин-четности указанным резонансам.

Скалярный резонанс в системе $4\pi^0$ (всего зарегистрировано 600 ± 70 событий) имеет массу и ширину

$$M = 1570 \pm 20 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 150 \pm 20 \text{ MeV}. \quad (6.12)$$

Именно по этим параметрам он был идентифицируется нами как $G(1590)$ -

Таблица 6.1: Отношения $R = N(\cos\theta_{Ob}>0.5)/N(\cos\theta_{Ob}<0.4)$ для состояний $4\pi^0$ -системы, полученные в эксперименте NA12, в сравнении с МК ожидаемыми значениями для состояний со спин-четностью $J^P = 0^+, 2^+$.

Состояние	Эксперимент, R	МК R для $J^P = 0^+$	МК R для $J^P = 2^+$
$f_2(1270)$	0.27 ± 0.08	0.9	0.20
$G(1590)$	1.3 ± 0.5	0.8	0.17
$X_2(1810)$	0.08 ± 0.05	0.7	0.15

мезон, который наблюдался ранее в модах распада $\eta\eta$ и $\eta'\eta$, см. [152, 153, 154]. Сечение его образования в реакции (6.1) при импульсе 100 ГэВ/с получено равным:

$$\sigma(\pi^-p \rightarrow G(1590)n) \times BR(G(1590) \rightarrow 4\pi^0) = 3 \pm 1 \text{ nb}, \quad (6.13)$$

оно было нормировано на сечение реакции $\pi^-p \rightarrow \eta'n$, $\eta' \rightarrow \eta\pi^0\pi^0$, имеющей близкую топологию, см. предыдущую главу, подробнее в [28].

Масса и ширина пика в области $f_2(1270)$ (зарегистрировано 400 ± 50 событий)

$$M = 1283 \pm 6 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 150 \pm 20 \text{ MeV} \quad (6.14)$$

согласуются с табличными значениями для $f_2(1270)$ -мезона [92]. Сечение его образования в реакции (6.1) равно:

$$\sigma(\pi^-p \rightarrow f_2(1270)n) \times BR(f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0) = 2.5 \pm 0.7 \text{ nb}. \quad (6.15)$$

Эти обстоятельства, а также данные о спин-четности состояния $4\pi^0$ в этой области масс, см. Табл. 6.1, свидетельствуют о наблюдении редкого распада $f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0$, для вероятности которого получена оценка:

$$BR(f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0) = (3 \pm 1) \times 10^{-3}. \quad (6.16)$$

Наконец, наблюдаемый новый резонанс $X_2(1810)$ (зарегистрировано 1600 ± 100 событий), также имеет спин-четность $J^{PC} = 2^{++}$; его масса, ши-

рина и сечение образования в реакции (6.1) получены равными:

$$M = 1806 \pm 10 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 190 \pm 20 \text{ MeV}, \quad (6.17)$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow X_2(1810)n) \times BR(X_2(1810) \rightarrow 4\pi^0) = 8 \pm 2 \text{ nb}. \quad (6.18)$$

По измеренным параметрам (6.17) его можно идентифицировать с состоянием $X_2(1810)$, наблюдавшимся ранее в одном из двух возможных решений в ПВА системы $\eta\eta$ при импульсе 100 ГэВ/с, см. [153]. Это позволяет дать оценку относительной вероятности этих мод распада $X_2(1810)$ -мезона:

$$BR(X_2(1810) \rightarrow 4\pi^0)/BR(X_2(1810) \rightarrow \eta\eta) = 0.8 \pm 0.3. \quad (6.19)$$

В данных ПВА образования $\pi^0\pi^0$ -системы при импульсе 100 ГэВ/с, см. Главу 3, $f_2(1810)$ -мезон не наблюдается. Количественно это можно сформулировать в виде ограничения сверху на отношение вероятностей его распадов:

$$BR(X_2(1810) \rightarrow \pi^0\pi^0)/BR(X_2(1810) \rightarrow 4\pi^0) < 0.25 \quad (6.20)$$

на 90% уровне достоверности, тогда как для обычных $q\bar{q}$ -мезонов это отношение должно быть больше 10, ср., например, с (6.16) [28].

6.5. Анализа реакции $\pi^- p \rightarrow 4\pi^0 n$ при импульсе 38 ГэВ/с

Анализ спектров масс $4\pi^0$ -систем в реакции (6.1) с учетом различных отборов событий по $\cos\theta_{Ob}$, подробно описанный в предыдущем разделе, был проведен также и по данным с эксперимента ГАМС-2000 при импульсе 38 ГэВ/с. Процедура анализа практически ничем не отличалась от описанной выше. На Рис. 6.7 представлены спектры масс $4\pi^0$ -систем для двух отборов по $\cos\theta_{Ob}$, подобно тому, как это было ранее сделано по данным при 100 ГэВ/с, Рис. 6.6. Спектры масс при 38 ГэВ/с также были профитированы тремя функциями Брейта-Вигнера, соответствующим резонансам $f_2(1270)$, $G(1590)$, $X_2(1810)$, и фоном, который в отличие от процедуры при импульсе 100 ГэВ/с был выбран в виде экспоненциальной функции:

$$Bg(M_{4\pi^0}) \sim (M_{4\pi^0} - m_0)^\mu \cdot \exp(-\alpha M_{4\pi^0} - \beta M_{4\pi^0}^2), \quad (6.21)$$

на рисунке 6.7 он показан штриховой линией. Полученные в результате фита параметры резонансов $f_2(1270)$, $G(1590)$ находятся в согласии с данными при 100 ГэВ/с и данными PDG. Значения массы и ширины резонанса $X_2(1810)$

$$M = 1811 \pm 4 \text{ MeV}, \quad \Gamma = 170 \pm 18 \text{ MeV}, \quad (6.22)$$

также хорошо согласуются с величинами при 100 ГэВ/с, см. выше уравнение (6.17).

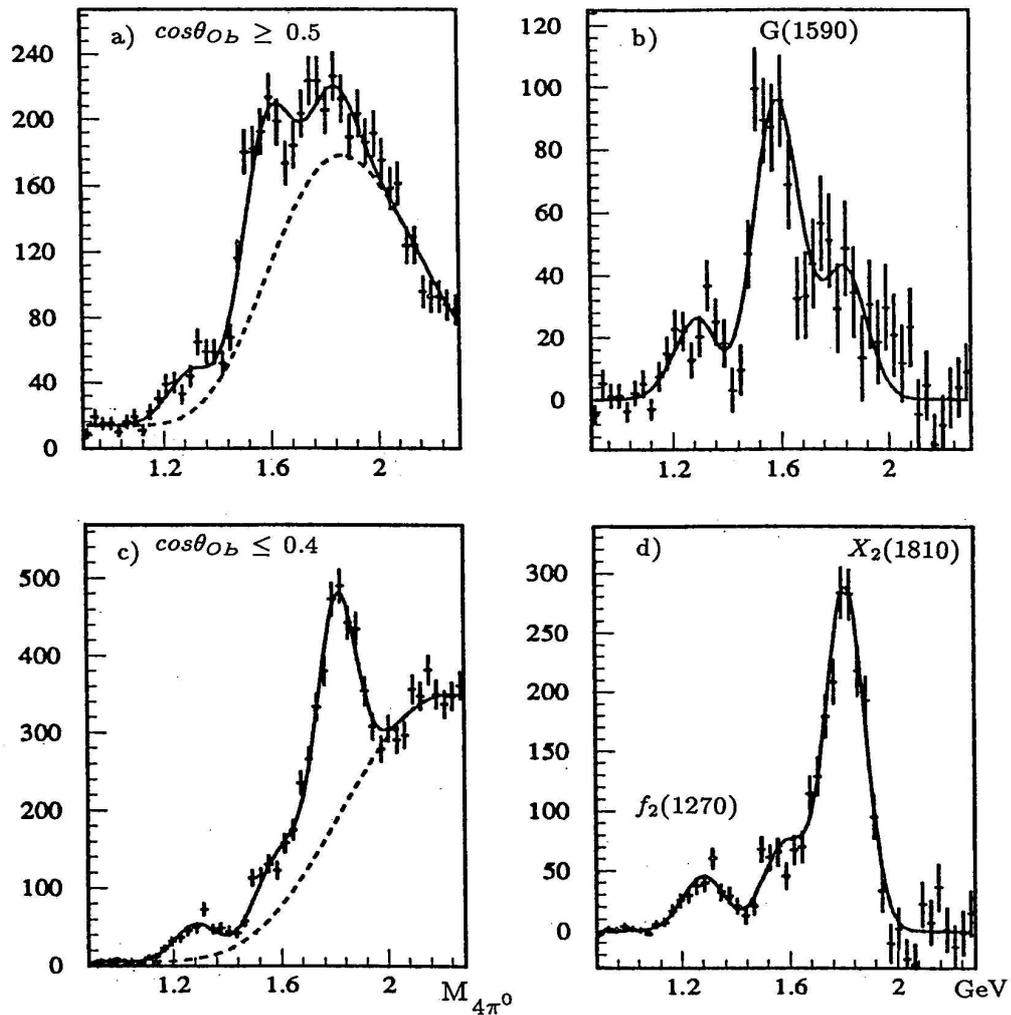


Рис. 6.7: Спектры инвариантных масс $4\pi^0$ -систем в реакции $\pi^-p \rightarrow 4\pi^0n$ при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.15$ (ГэВ/с)²: *a)* $\cos\theta_{Ob} > 0.5$, отбор выделяет состояния с $J^P = 0^+$, сплошная линия показывает фит спектра тремя функциями Брейта-Вигнера и экспоненциальным фоном, последний показан штриховой линией; *b)* то же, что на рисунке а), но за вычетом экспоненциального фона; *c)* $\cos\theta_{Ob} < 0.4$, отбор выделяет состояния с $J^P = 2^+$, сплошная линия показывает фит спектра тремя функциями Брейта-Вигнера и экспоненциальным фоном, последний показан штриховой линией; *d)* то же, что на рисунке с), но за вычетом экспоненциального фона.

Сечения рождения резонансов $f_2(1270)$, $G(1590)$ и $X_2(1810)$ в реакции (6.1) при импульсе 38 ГэВ/с и $-t < 0.15$ (ГэВ/с)² получены равными:

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow f_2(1270)n) \times BR(f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0) = 71 \pm 13 \text{ nb} \quad (6.23)$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow G(1590)n) \times BR(G(1590) \rightarrow 4\pi^0) = 50 \pm 10 \text{ nb} \quad (6.24)$$

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow X_2(1810)n) \times BR(X_2(1810) \rightarrow 4\pi^0) = 31 \pm 5 \text{ nb}. \quad (6.25)$$

Эти сечения были отнормированы на хорошо известное сечение реакции $\pi^- p \rightarrow \eta'_{\rightarrow 2\gamma} n$, см. [155]. При этом события последней реакции были обработаны параллельно с событиями реакции (6.1).

Для полноты приведем также отношения полученных сечений рождения резонансов при импульсе 38 ГэВ/с к таковым при импульсе 100 ГэВ/с, см. уравнения (6.13), (6.15) и (6.18):

$$\sigma_{38\text{GeV}/c}(\pi^- p \rightarrow f_2(1270)n) / \sigma_{100\text{GeV}/c}(\pi^- p \rightarrow f_2(1270)n) = 15 \pm 5, \quad (6.26)$$

$$\sigma_{38\text{GeV}/c}(\pi^- p \rightarrow G(1590)n) / \sigma_{100\text{GeV}/c}(\pi^- p \rightarrow G(1590)n) = 17 \pm 7, \quad (6.27)$$

$$\sigma_{38\text{GeV}/c}(\pi^- p \rightarrow X_2(1810)n) / \sigma_{100\text{GeV}/c}(\pi^- p \rightarrow X_2(1810)n) = 9 \pm 3. \quad (6.28)$$

Эти отношения находятся в согласии с предсказаниями модели однопионного обмена: $\sigma_{38\text{GeV}/c} / \sigma_{100\text{GeV}/c} = (38/100)^{-2.15 \pm 0.05} = 8.0 \pm 0.4$.

Следует также отметить, что в последствии резонанс $X_2(1810)$ был отождествлен с мезоном $f_2(1810)$, который наблюдался в нескольких экспериментах в каналах $\eta\eta$, $K\bar{K}$ и $4\pi^0$, подробнее см. [148].

Наконец, величина $BR(f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0)$ по данным при импульсе 38 ГэВ/с равна:

$$BR(f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0) = (4.4 \pm 1.0) \times 10^{-3}, \quad (6.29)$$

детали см. в работе [14]. Это позволяет совместно с (6.16) дать ее уточненное значение:

$$BR(f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0) = (3.7 \pm 0.7) \times 10^{-3}. \quad (6.30)$$

Глава 7. Результаты проведенных исследований, их место в мезонной спектроскопии

В данной главе проведено обсуждение представленных в настоящей диссертации результатов, а также дано их сравнение с данными других экспериментов и теоретическими моделями.

7.1. Решение проблемы неоднозначностей ПВА

Решение в работе [9] проблемы неоднозначности парциально-волнового анализа для реакции (4.1) имело большое значение для развития методики ПВА в целом, поскольку в этой работе было определено число возникающих в ПВА нетривиальных решений в зависимости от множества парциальных волн, включенных в анализ, а также предложена математически четкая процедура, ср. с работой [78], нахождения всех решений ПВА по одному известному случайному решению, получаемому в результате фитирования угловых распределений событий реакции в терминах парциальных амплитуд. В дальнейшей работе, где возникала или обсуждалась проблема неоднозначности ПВА для системы из двух псевдоскалярных мезонов, неоднократно использовали результаты работ [9, 10] или напрямую с соответствующей ссылкой, см. [107, 108, 109, 110], либо косвенно, ссылаясь на работу [73], где решение проблемы неоднозначности ПВА также было изложено, следуя работе [9], и с прямой на нее ссылкой. Причина таких опосредственных ссылок на работу [9], см. например работы [156, 157], состоит в том, что оригинальная работа [9] не была достаточно долгое время доступна научному сообществу в реферируемых журналах, и только лишь спустя 8 лет, т.е. в 1999 г. эта работа была опубликована в журнале “Ядерная Физика” [10], но это уже никак не могло повлиять на сложившуюся к этому времени систему ссылок по данному

вопросу.

Другой аспект проблемы неоднозначности ПВА, также восходящий к результатам работы [9], состоит в том, что и сшивку решений масс-независимого ПВА в соседних массовых бинах также лучше всего проводить в терминах корней функции Герстена, см. раздел 2.2.2 данной диссертации. Оказывается, что, как правило, реальные и мнимые части различных корней функции Герстена хорошо разделяются, и поэтому идентификация глобальных решений ПВА в соседних массовых бинах, равно как и в значимых интервалах по массе анализируемой системы, не вызывает особых затруднений, если только решения в некоторых точках не пересекаются, см. например Рис. 3.11, что однако в любом случае требует особого рассмотрения. Эта методика сейчас уже повсеместно используется при проведении масс-независимого ПВА реакций образования различных двухмезонных систем, см. например [157].

7.2. Скалярные резонансы

Второй значимый результат настоящей работы - это наблюдение серии скалярных $\pi^0\pi^0$ -резонансов, образующихся в зарядовообменной реакции (3.1): $f_0(980)$, $f_0(1300)$, $f_0(1500)$ и $f_0(2010)$, – см. раздел 3.2.4 диссертации. Характерная особенность механизма их образования при малых переданных импульсах, $-t < 0.2$ (ГэВ/с)², состоит в том, что они деструктивно интерферируют с нерезонансными (фоновыми) процессами рождения $\pi^0\pi^0$ -системы в этой же реакции. В эксперименте это проявляется в виде соответствующих дипов в интенсивности S -волны в зависимости от массы $\pi^0\pi^0$ -системы, см. Рис.3.14. Вместе с тем, что касается по крайней мере $f_0(980)$ -мезона, при больших переданных импульсах, $-t > 0.45$ (ГэВ/с)², $f_0(980)$ уже проявляется как обыкновенный пик в интенсивности S -волны с теми же значениями массы и ширины, что и при малых $-t$, см. Рис. 3.8, что говорит об изменении механизма образования $f_0(980)$ при больших передачах импульса. Эти результаты, безусловно, вызвали большой интерес у научного сообщества.

Достаточно сказать, что на основную работу по $f_0(980)$ -мезону [97] в базе данных inSPIRE [158] на июнь 2014 г. имеется 73 ссылки, а на итоговую работу [11] по ПВА реакции (3.1) при импульсе 100 ГэВ/с — 36 ссылок. Что же касается сводного рисунка по измерению интенсивности S -волны в реакции (3.1) при импульсах 38 и 100 ГэВ/с, Рис. 3.14, он тоже хорошо известен и неоднократно цитировался в различных работах по мезонной спектроскопии, см. например обзор [159].

Следует также отметить, что наблюдаемая деструктивная интерференция скалярных $\pi^0\pi^0$ -резонансов ($I^G J^{++} = 0^+0^{++}$) с нерезонансным фоном при малых квадратах переданных 4-импульсов $|t|$ проявляется также и при образовании $\eta\eta$ -системы в зарядовообменной реакции $\pi^- p \rightarrow \eta\eta n$, см. работы [160, 161], в то время как, скажем, изовекторные скалярные резонансы в системе $\eta\pi^0$ ($I^G J^{++} = 1^-0^{++}$) экспериментально проявляются в виде обыкновенных пиков над фоном, см. Рис. 4.10 и 4.21, что свидетельствует о существенном различии механизмов образования резонансов в $\pi^0\pi^0$ - и $\eta\eta$ -системах по сравнению с $\eta\pi^0$ -резонансами.

Особый интерес к скалярным состояниям связан, прежде всего, с проблемой поиска и идентификации экзотических мезонных резонансов, включая скалярные глоболы. Возвращаясь в этой связи к скалярным $\pi\pi$ -резонансам с $I^G J^{++} = 0^+0^{++}$, отметим, что резонансы $f_0(980)$, $f_0(1300)$ и $f_0(1500)$ наблюдаются также и в парциально-волновом анализе $\pi^+\pi^-$ и $\pi^0\pi^0$ систем, образующихся в центральной кинематической области pp -взаимодействий при импульсе 450 ГэВ/с в эксперименте WA102 [157, 162]. При этом скалярный резонанс $f_0(2010)$ в этих системах не наблюдается в силу, по-видимому, низкой эффективности эксперимента либо недостаточной статистики в этой области масс двухпионных систем. Однако для описания S -волны в системе $\pi^+\pi^-$ здесь, [157], (в отличие от $\pi^0\pi^0$) дополнительно вводится скалярный резонанс $f_0(1710)$, который в описанных выше экспериментах Сотрудничества ГАМС, как мы видели выше, не наблюдается. Это обусловлено достаточно слабой связью $f_0(1710)$ с системой $\pi^0\pi^0$, см. например [163], но сильной связью с

$K\bar{K}$ -каналом, поскольку в его волновой функции доминирует $s\bar{s}$ -компонента, см. миниобзор по скалярным резонансам в таблице частиц 2012 г. [148]. Что же касается резонанса $f_0(2010)$, то в эксперименте WA102 он наблюдается в заряженных модах 4π -распада [164, 165], а также в эксперименте E835 [166] в моде 2η .

Вместе с тем интересно отметить, см. предыдущую главу, что из всех пяти перечисленных выше скалярных резонансов, наблюдавшихся как в экспериментах ГАМС-2000 (SERP-E-140) и ГАМС-4000 (NA12), так и в WA102, только один резонанс, а именно $G(1590)/f_0(1500)$, наблюдается в системе $4\pi^0$, хотя чувствительность экспериментов [14, 28], безусловно, весьма высокая. Достаточно сказать, что в этих экспериментах измерена вероятность редкого распада $f_2(1270) \rightarrow 4\pi^0$ на уровне $\sim 0.4\%$, см. (6.28). Кроме того, $f_0(1500)$ — это также единственный скаляр в системе $4\pi^0$, который наблюдается в центральной кинематической области pp-столкновений в эксперименте WA102 [164]. В целом, все это является весомыми аргументами в пользу экзотической природы резонанса $G(1590)/f_0(1500)$.

Обратимся теперь к теоретически работам, без которых интерпретация наблюдаемых резонансов, практически, также невозможна.

Во-первых, в рамках К-матричного подхода [160] удалось описать все перечисленные выше скалярные мезонные резонансы в области масс до 1900 МэВ, наблюдавшиеся в экспериментах ГАМС и WA102, равно как и в данных по резонансам в $IJ^{PC} = 00^{++}, 10^{++}, 02^{++}, 12^{++}$ волнах экспериментов в BNL в реакции $\pi^- p \rightarrow K\bar{K}n$ и Cristal Barrel в реакциях $p\bar{p} \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$, $p\bar{p} \rightarrow \pi^0\pi^0\eta$ и $p\bar{p} \rightarrow \pi^0\eta\eta$, см. [160], что говорит о самосогласованности указанных экспериментальных данных в целом. При этом для описания данных по S -волне оказалось необходимым ввести еще один скалярный резонанс $f_0(1530)$ с шириной порядка 600 МэВ ($IJ^{PC} = 00^{++}$), деструктивная интерференция с которым указанных выше скалярных резонансов приводит, в частности, к спектру квадрата S -волны, показанному на Рис. 3.14. Аналогичные результаты в плане описания скалярных резонансов в системе $\pi^0\pi^0$ получены и в

работе [163]. В качестве иллюстрации качества описания данных ниже приведен рисунок из этой работы, Рис.7.1, где показана полученная интенсивность S -волны в реакции (3.1), сравни с Рис. 3.14.

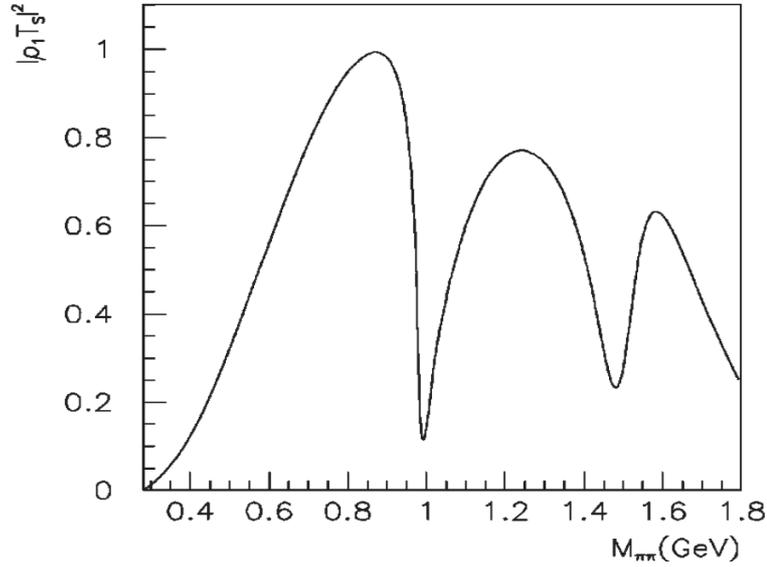


Рис. 7.1: Квадрат модуля изоскалярной ($I = 0$) $\pi\pi$ -амплитуды в S -волне реакции (3.1). Рисунок взят из работы [163].

Во-вторых, для понимания результатов экспериментов важное значение имеют эффекты смешивания состояний с одинаковыми квантовыми числами $I^G J^{PC}$. Эффекты эти в свою очередь зависят от конкретной теоретической модели. При этом многообразие возможных голых (чистых) резонансных состояний (глоболы, гибриды, $4q$ -состояния и мезонные молекулы) в дополнение к обычным $q\bar{q}$ -мезонам делают задачу классификации наблюдаемых в эксперименте резонансов весьма сложной. И в настоящее время она все еще далека от завершения, подробнее см. обзоры [116, 120]. В секторе скалярных резонансов эта проблема стоит с особой остротой, поскольку число экспериментально открытых и подтвержденных в других экспериментах состояний [148] заведомо превышает ожидаемое в наивной кварковой модели, и в идеале требуется тщательный анализ всех скалярных резонансов одновременно, чтобы понять природу каждого из включенных в анализ резонансов.

Тем не менее, что касается резонансов $f_0(1300)$, $f_0(1500)$ и $f_0(1710)$, то есть достаточно убедительная аргументация, что они являются смесью чи-

стых состояний $n\bar{n} = (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$, $s\bar{s}$ и G . При этом конкретная матрица смешивания этих состояний, вообще говоря, зависит от того является ли чистое глюонное состояние G тяжелее или легче чем чистое $s\bar{s}$ -состояние. Если скалярное глюонное состояние легче чем $s\bar{s}$ -состояние, то в волновой функции $f_0(1500)$ -мезона вклад чистого G -состояния в различных моделях варьируется от 80% до 30%. Ежели $M_G > M_{s\bar{s}}$, то преимущественно глюонным состоянием является $f_0(1710)$, а в $f_0(1500)$ -мезоне доминирует $s\bar{s}$ -состояние или $SU(3)$ октетное $q\bar{q}$ -состояние $|8\rangle$ вплоть до чистого $|8\rangle$ состояния в отдельных моделях, подробнее см. [167]. Однако здесь следует отметить, что по сравнению с пионерской работой об открытии $G(1590)$ -мезона в канале $\eta\eta$ [161] интерпретация спектра S -волны в системе $\eta\eta$ изменилась: в оригинальной работе [161] под $G(1590)$ -мезоном понимался пик в интенсивности S -волны при массе 1590 МэВ, тогда как согласно современным представлениям $G(1590)/f_0(1500)$ -мезон связывают с дипом в этом же спектре при массе ~ 1500 МэВ, чем и объясняется произошедшее изменение его массы по сравнению с оригинальной работой, подробнее см. например [160], а также обзор [116].

В связи с рассмотренной выше интерпретацией $G(1590)/f_0(1500)$ -мезона, как имеющего существенную глюонную компоненту в своей волновой функции, следует упомянуть также $G_2/f_2(2175)$ -состояние [168], которое является кандидатом в тензорные глюболы. При этом отношение массы этого состояния к массе $G(1590)/f_0(1500)$ -мезона, подробнее см. в [26, 169], находится в согласии с оценками, полученными в расчетах на решетках [170].

Наконец, по возможности кратко остановимся на скалярных резонансах $f_0(980)$ и $a_0(980)$, см. разделы диссертации 3.1.3 и 4.4, соответственно. Из легких скалярных мезонов, безусловно, это наиболее изученные и одновременно, если можно так выразиться, наиболее мистические объекты, необычные свойства которых тщательно изучаются и широко обсуждаются на протяжении уже более 40 лет в сотнях статей. Однако консенсуса в понимании природы этих состояний все еще нет. Общая картина модельно зависима и усложня-

ется близостью массы этих состояний к $K\bar{K}$ -порогу, а также возможными эффектами смешивания $f_0(980)$ - и $a_0(980)$ - мезонов, равно как и смешивания $f_0(980)$ с другими изоскалярными скалярными состояниями, включая $f_0(500)$, $f_0(1370)$ и скалярный глюбол. Хотя интерпретация $f_0(980)$ -мезона, скажем, преимущественно как $s\bar{s}$ -состояния (к слову, при этом, $a_0(980)$ интерпретируется как околопороговая особенность вблизи открытия $K\bar{K}$ -канала) имеет место в литературе, см. например [171, 172], существенно более аргументированными к настоящему времени нам представляются модели $f_0(980)$ -мезона как $4q$ -состояния или $K\bar{K}$ -молекулы, где анализируются свойства не только $f_0(980)$ -мезона, но и одновременно свойства всего SU(3) нонета: $a_0(980)$, $f_0(980)$, $f_0(500)$, $K_0^*(700)$, проявляющиеся в различных реакциях и распадах, подробнее см. обзоры [116, 120, 148]. Впрочем, даже приписывание $f_0(980)$ - и $a_0(980)$ - мезонов к указанному выше SU(3) нонету не является безальтернативным, см. например работу [173], где на основе анализа (J, M^2) и (n, M^2) диаграмм (n - это радиальное квантовое число волновой функции мезона) делается заключение, что эти состояния принадлежат $n^{2S+1}LJ^{PC} = 1^3P_0 0^{++} q\bar{q}$ -нонету: $a_0(980)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $K_0^*(1430)$. Интересную дискуссию по этому вопросу можно также найти в обзоре [116], к которому мы отсылаем заинтересованного читателя в связи с дефицитом места для более подробного изложения этой темы в рамках настоящей работы. Здесь же отметим лишь, что в целом ситуация с $f_0(980)$ - и $a_0(980)$ - мезонами остается все еще достаточно противоречивой и столь же интересной. Новые данные по скалярным мезонам в этой связи крайне желательны для более глубокого понимания природы этих и связанных с ними состояний.

Что касается $f_0(980)$ -мезона, то представленные в разделе 3.1.3 диссертации результаты по измерению интенсивности S -волны в реакции (3.1) в зависимости от квадрата переданного импульса t , интерпретируются в работе [174] как обусловленные вкладом a_1 -обмена в t -канал реакции при больших $|t|$ в дополнение к однопионному обмену, доминирующему при малых $|t|$. В этой связи следует отметить, что это первое наблюдение a_1 -обмена в зарядо-

вобменной реакции в эксперименте на неполяризованной мишени, подробнее см. работу [174].

Механизм образования $a_0(980)$ -мезона в реакции перезарядки (4.1) подобен механизму образования $f_0(980)$ в реакции (3.1): в t -распределение событий реакции, см. Рис. 4.11, также дают вклад два обмена, ρ_2 и b_1 , с разными наклонами t -распределений. При этом интересно отметить, что при условии обменного вырождения в модели полюсов Редже ρ_2 -полюс является партнером a_1 -полюса [174], см. также [175]. В координатном представлении указанные выше вклады обменов с разным наклоном t -распределений событий образования $f_0(980)$ - и $a_0(980)$ - мезонов в реакциях (3.1) и (4.1), соответственно, свидетельствуют о наличии в их волновых функциях как мягкой периферии, так и жесткого ядра, см. [116, 175, 176]. В целом, все это можно рассматривать как еще один аргумент в пользу одинаковой природы $f_0(980)$ - и $a_0(980)$ -мезонов. Детальную аргументацию в пользу их интерпретации как $4q$ -состояний см. в работе [177].

7.3. Резонансы с высшими спинами

В данной диссертации изучаются и обсуждаются также серии резонансов с высшими спинами. Это $f_2(1270)$ -, $f_4(2050)$ -, $f_6(2510)$ - резонансы в системе $2\pi^0$, $a_2^0(1320)$ -, $a_4^0(2040)$ - резонансы в системе $\eta\pi^0$ и $f_2(1270)$ -, $f_2(1810)$ - резонансы в системе $4\pi^0$, см. соответственно Главы 3, 4 и 6. Указанные резонансы в системах $2\pi^0$ и $\eta\pi^0$ являются классическими $q\bar{q}$ -мезонами [175]. Все они хорошо ложатся на f_2/a_2 -траектории, которые являются сильно вырожденными, см. Рис. 7.2. При этом траектории в высокой степени линейны как в плоскости (M^2, J) , так и в плоскости (M^2, n) , где M - масса $q\bar{q}$ -мезона, J - его спин, а n - радиальное квантовое число волновой функции, см. [175]. Более того, предсказывается и экспериментально наблюдается вырождение траекторий по квантовым числам J и n , что в конечном счете выражается в

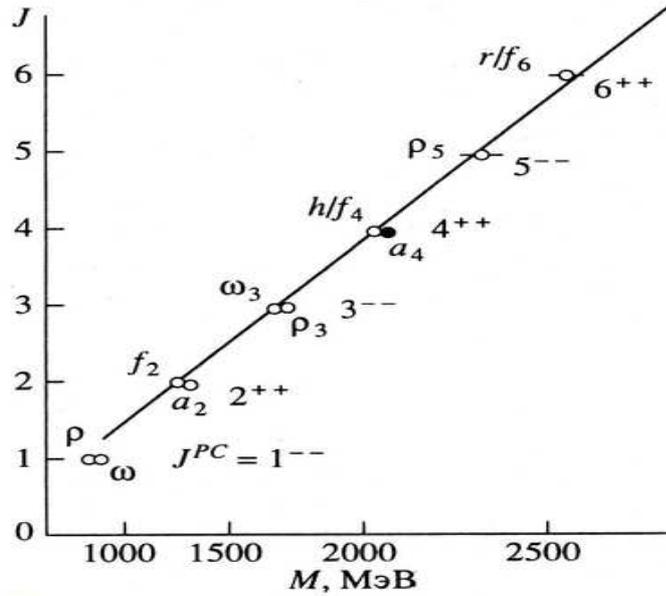


Рис. 7.2: ω/ρ - и f_2/a_2 - траектории с расположенными на них резонансами $f_2(1270)$, $f_4(2050)$, $f_6(2510)$, $a_2^0(1320)$ и $a_4^0(2040)$, см. [21]. Резонанс $a_6(2450)$ на рисунке не показан, как наблюдавшейся пока только в единственном эксперименте. Шкала по массе мезонов M квадратичная.

виде уравнения:

$$M^2 = 2\pi\sigma(l + n + \frac{1}{2}), \quad (7.1)$$

где σ - это натяжение $q\bar{q}$ струны, а l - орбитальное квантовое число. При этом спин J мезона выражается через орбитальный момент l и спин $q\bar{q}$ -пары: $J = l, l \pm 1$, подробнее см. [116] и приведенные там ссылки. В целом, этот весьма эффективный подход позволяет классифицировать и с достаточно высокой точностью предсказывать массы различных $q\bar{q}$ -состояний, а также объясняет крайне неоднородную заселенность массовой шкалы классическими мезонными состояниями [116, 178].

В частности, что касается $f_2(1810)$ -резонанса, то совместно с резонансами $f_2(2010)$, $a_2(1700)$ и $K_2^*(1980)$ он, по-видимому, входит в нонет первого радиального возбуждения обычных тензорных мезонов: $f_2(1270)$, $f_2(1525)$, $a_2(1320)$ и $K_2(1430)$, см. [179]. Вместе с тем обращают на себя внимания его несколько необычные свойства: он уверенно наблюдается в каналах распада на $4\pi^0$ (см. Рис.6.6 и Рис.6.7) и на $\eta\eta$ [153] и не наблюдается в канале распада на $2\pi^0$ (см. уравнение (3.8) и Рис.3.12). Безусловно, это интересный объект,

и необходимы его дальнейшие исследования.

Наконец, отметим, что как $f_6(2510)$, так и $a_6(2450)$ являются в настоящее время мезонами с наивысшим наблюдаемым спином [148]. И в этом плане дальнейшие эксперименты по поиску мезонных состояний с более высоким спином, например, поиску $f_8(2980)$ - и $a_8(2900)$ - мезонов, массы которых легко считаются в рамках изложенного выше подхода, см. уравнение (7.1), представляют несомненный интерес для развития изложенных выше модельных представлений и теории в целом.

7.4. Система $\eta\pi$ в области масс до 1800 МэВ

Основными результатами ПВА реакции (4.1) являются наблюдение скалярного мезона $a_0(1300)$, а также экспериментальное подтверждение того, что тензорный $a_2(1320)$ -мезон образуется при доминирующем обмене с естественной спин-четностью в t -канале этой реакции, см. раздел 4.6 диссертации. Что же касается состояния $\pi_1(1400)$ с экзотическими квантовыми числами $J^{PC} = 1^{-+}$, то данные проведенного ПВА не противоречат образованию этого состояния в реакции (4.1) при импульсе 38 ГэВ/с, но не могут служить и независимым доказательством его существования, подробнее см. раздел 4.6 диссертации. Здесь необходимы дальнейшие эксперименты.

Изовекторный мезон $a_0(1300)$ с параметрами очень близкими к полученным в настоящей работе (4.22) наблюдается также в эксперименте OBELIX [180, 181] в системах $K^\pm K_s$, а также в системе $\eta\pi^-$ [130]. Как отмечалось ранее, наши результаты не противоречат также и эксперименту E852 [112]. В таблицах частиц [148] это состояние довольно искусственно объединено с широким резонансом $a_0(1450)$, что на наш взгляд является не обоснованным.

Далее, имея в виду обсуждавшееся выше сильное вырождение f_2 и a_2 траекторий, а также n, l вырождение траекторий, см. (7.1), мы вправе ожидать, что существует изоскалярный партнер для $a_0(1300)$ мезона. И действительно, в области масс 1300-1400 МэВ существует некое состояние $f_0(1370)$,

см. [148], причем сюда, опять искусственно, включены как резонансы с массой ≈ 1400 МэВ и шириной ≈ 400 МэВ, так и достаточно узкие резонансы с массой ≈ 1300 МэВ и шириной ≈ 100 МэВ. По-видимому, все же в указанной области масс существует два скалярных резонанса, широкий и узкий, причем как в изоскалярном, так и изовекторном секторе. И в этом плане, результаты описанных в разделе 4.6 экспериментов на установке ГАМС-2000 при импульсе 38 ГэВ/с являются дополнительным аргументом в пользу такой интерпретации имеющихся экспериментальных данных.

Наконец, что касается экзотического состояния $\pi_1(1400)$ в системе $\eta\pi^0$, его существование подтверждено также в недавней работе эксперимента COMPASS, см. [182].

7.5. Резонансы в системе $\eta\pi^0\pi^0$

В пятой главе диссертации были представлены результаты ПВА $\eta\pi^0\pi^0$ -системы, образующейся в реакции (5.1) при импульсе 100 ГэВ/с. В спектрах квадратов соответствующих J^{PC} -амплитуд идентифицированы четыре резонансные состояния: $\eta(1295)$, $\iota/\eta(1440)$, $f_1(1285)$ и $f_1(1420)$, см. рисунки 5.2 и 5.3. Каждое из этих состояний представляет свой собственный интерес.

Наблюдаемые каналы распада на $\eta\pi^0\pi^0$, а также на $a_0(980)\pi^0$, позволяют определить G -четность состояния $\eta(1295)$ как положительную. Вместе с тем, изоспин $\eta(1295)$ при этом из данных эксперимента [24], вообще говоря, однозначно не определяется: он может быть равным 0 или 2. Однако близость измеренных параметров этого резонанса, см. Табл. 5.2, к табличным значениям для резонанса $\eta(1295)$ [148] позволяет с высокой вероятностью идентифицировать его как $\eta(1295)$ -мезон. Последний является наиболее легким псевдоскалярным мезоном после η' , что дает основание идентифицировать его далее как первое радиальное возбуждение η -мезона, см. [116, 175, 183], но тогда первое радиальное возбуждение η' -мезона будет иметь массу ≈ 1510 МэВ, т.е. близкую к массе $\eta(1475)$ -мезона. Учитывая практически полное

вырождение по массе $\eta(1295)$ - и $\pi(1300)$ - мезонов, мы вправе ожидать идеальное смешивание $\eta(1295)$ - и $\eta(1475)$ - мезонов, что в свою очередь означает доминантность $s\bar{s}$ -компоненты в волновой функции $\eta(1475)$ -мезона, который в силу этого и распадается в основном на $K^*\bar{K}$ и не распадается на $\eta\pi^0\pi^0$. Поэтому он и не наблюдается в эксперименте [24], данные которого, таким образом, подтверждают выше приведенную классификацию $\eta(1295)$ -, $\pi(1300)$ - и $\eta(1475)$ - мезонов.

Рассмотрим теперь резонансное состояние, обозначенное в работе [24] как $\iota/\eta(1440)$. Во-первых, измеренная в этой работе масса указанного состояния имеет меньшую величину, а именно 1424 ± 6 МэВ, см. Табл. 5.2, чем это следует из его обозначения $\eta(1440)$. Во-вторых, этот резонанс, см. [102], в последствии расщепился на два: $\eta(1440)$ и $\eta(1475)$, детали см. в [184]. При этом резонансное состояние $\iota/\eta(1440)$ из работы [24] было совершенно справедливо отнесено (идентифицировано) как $\eta(1405)$ мезон [102]. И наконец, в третьих, этому состоянию, вообще говоря, нет места в приведенной выше классификации $\eta(1295)$ - и $\eta(1475)$ - мезонов: для того чтобы быть радиальным возбуждением η -мезона оно слишком тяжелое, а для радиального возбуждения η' - слишком легкое. Наиболее обсуждаемая интерпретация этого состояния - это псевдоскалярный глюбол, см. например [116, 185]. Что же касается данных работы [24], то, как уже отмечалось в Главе 5, обращает на себя внимание очень большая величина (5.18) отношения $BR(\iota/\eta(1440) \rightarrow \eta(\pi^0\pi^0)_S)/BR(\iota/\eta(1440) \rightarrow a_0\pi^0)$ для этого состояния по сравнению с таковой для $\eta(1295)$ -мезона, который мы рассматриваем как радиальное возбуждение обычного $q\bar{q}$ -мезона, см. Табл. 5.3. Такая величина (5.18) однако находит свое естественное объяснение в механизме глюонного обесцвечивания при распаде глюболов [145, 149]. В этом плане данные нашей работы [24], Табл. 5.3, являются еще одним аргументом в пользу интерпретации $\eta(1405)$ -состояния как псевдоскалярного глюбола.

Резонанс $f_1(1285)$ с $I^G J^{PC} = 0^+1^{++}$ идентифицируется как $q\bar{q}$ 3P_1 состояние, которое входит в нонет аксиальных мезонов: $a_1(1260)$, $f_1(1285)$,

$f_1(1510)$ и $K_1(1400)$. Измеренные параметры $f_1(1285)$, см. Табл. 5.2, равно как и относительные вероятности каналов его распада, см. Табл. 5.3, хорошо согласуются с данными других экспериментов по этому состоянию [148].

Резонанс $f_1(1285)$, безусловно, интересный объект. Его относительная ширина $\Gamma/M = 1.9\%$ сравнима с таковой (1.1%) для ω мезона. В силу этого он с заметной вероятностью (5.5%) распадается по электромагнитному каналу $f_1(1285) \rightarrow \gamma\rho^0$, а также является удобным для изучения в качестве промежуточного состояния в различных, в том числе радиационных распадах тяжелых (очарованных) мезонов. Достаточно сильное его вырождение по массе с $a_1(1260)$ -мезоном обуславливает угол смешивания $f_1(1285)$ - и $f_1(1510)$ - мезонов близкий к идеальному. В свою очередь это предполагает большой вклад $s\bar{s}$ -состояний в волновую функцию $f_1(1510)$, что и проявляется экспериментально в его доминантном распаде на $K\bar{K}^*$, см.[148].

Что касается $f_1(1420)$ -мезона (в ПВА системы $\eta\pi^0\pi^0$ -системы он виден в качестве небольшого пика в спектре масс квадрата $1^+a_0\pi^0P$ -волны, Рис. 5.3 справа), то он также доминантно распадается на $K\bar{K}^*$ -систему, см. [148], а в канале $a_0\pi^0$ помимо работы [25] он наблюдается еще в эксперименте ОМЕГА [186] и также не наблюдается в этом эксперименте в прямом распаде на $\eta\pi^0\pi^0$. Учитывая сильную связь $a_0(980)$ с $K\bar{K}$ -каналом, это наблюдение не противоречит интерпретации $f_1(1420)$ как преимущественно $s\bar{s}$ -состояния.

Вместе с тем, подобно $\eta(1405)$ -мезону в нонете первого радиального возбуждения псевдоскалярных мезонов, $f_1(1420)$ -мезон также оказывается лишним в нонете аксиальных мезонов, и поэтому должна быть проанализирована возможность его интерпретации как экзотического состояния. Попытка его интерпретации как связанного с аксиальным глюонным состоянием оказалась не совсем успешной: хотя и удалось описать массы всех трех мезонов, $f_1(1285)$, $f_1(1420)$ и $f_1(1510)$, в модели смешивания $n\bar{n}$,- $s\bar{s}$ - и G - состояний ($f_1(1420)$ -состояние при этом имеет 85% глюобольную компоненту), вероятности радиационных распадов $J/\Psi \rightarrow \gamma f_1(1285)$ и $J/\Psi \rightarrow \gamma f_1(1420)$, а также двухфотонные ширины $\Gamma_{\gamma\gamma^*}(f_1(1285))$ и $\Gamma_{\gamma\gamma^*}(f_1(1420))$ в этой модели не со-

гласуются с данными эксперимента, см. [187].

В этой связи следует принять во внимание, что резонанс $f_1(1510)$ не является твердо установленным состоянием, он наблюдался всего в трех экспериментах и, безусловно, требует подтверждения [148]. Впрочем, последние эксперименты на BESS III позволили выделить $f_1(1510)$ -состояние в радиационном распаде $J/\Psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\eta'$ с массой и шириной 1522.7 ± 5 МэВ и 48 ± 11 МэВ, соответственно, на уровне 5.7 стандартных отклонения [188]. При этом однако анализ угловых распределений не проводился. Дальнейшие эксперименты, чтобы разобраться с нонетом аксиальных мезонов, представляются поэтому крайне желательными.

Подводя итоги проведенных исследований, отметим, что описанные выше эксперименты в рамках программы ГАМС, положенные в основу настоящей диссертации, сыграли существенную роль в исследовании ряда важных объектов в спектроскопии легких мезонов, включая спектроскопию экзотических состояний. При этом часть результатов получена впервые и впоследствии была подтверждена данными других экспериментов. Все изложенные выше результаты нашли свое место в мезонной спектроскопии и достойно представлены в таблице свойств частиц [148].

В заключение имеет смысл отметить три, на наш взгляд, важных момента. Во-первых, вырождение мезонных состояний по квантовым числам l, n приводит к высокой неоднородности в заселенности массового спектра мезонных (адронных) резонансов, см. [116, 178]. Практически это часто проявляется в наличии нескольких резонансов с близкими значениями массы и ширины в достаточно ограниченной области масс, например, как это имеет место в нашем случае $f_1(1285)$ - и $\eta(1295)$ -, а также $\eta(1405)$ - и $f_1(1420)$ -мезонов. Множество других примеров легко найти в [148]. Поэтому для разделения резонансов парциально-волновой анализ различных систем, безусловно, является необходимым и эффективным инструментом.

Во-вторых, для понимания даже уже открытых резонансов требуются

модели интеграционного плана, см. например [160, 175], которые объясняют и количественно согласовывают друг с другом свойства одновременно большого количества резонансов. В настоящее время мезонная спектроскопия находится лишь в начале этого большого пути.

И в третьих, в связи с накоплением огромного экспериментального и теоретического материала адронная спектроскопия постепенно превращается из объекта исследований - в инструментарий исследования других явлений и процессов, который успешно применяется, например, для изучения адронной материи при экстремальных плотностях и температуре, см. например [189], а также холодной материи атомных ядер [190]. Одновременно результаты этих новых экспериментов обогащают и саму спектроскопию.

Заключение

Подведем итоги. Основными результатами настоящей диссертационной работы, которые выносятся на защиту, являются:

- Разработка алгоритма Фурье-параметризации многомерной Монте-Карло эффективности, основанного на принципе максимума энтропии.
- Решение проблемы неоднозначностей в парциально-волновом анализе систем из двух псевдоскалярных мезонов, образующихся в зарядообменных π^-p взаимодействиях. Исчерпывающий алгоритм нахождения всех нетривиальных решений ПВА был представлен впервые. Это позволило провести парциально-волновой анализ реакций $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ и $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$ в широких диапазонах масс двухмезонных систем и переданных импульсов.
- Разработка алгоритма сшивки глобальных решений в парциально-волновом анализе бинарных систем из псевдоскалярных мезонов, основанного на корнях функции Герстена. Это имело принципиальное значение для идентификации физического решения в широком диапазоне масс ряда двухмезонных систем, образующихся в указанных выше реакциях.
- Парциально-волновой анализ реакции $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ при импульсах 38 ГэВ/с и 100 ГэВ/с в области масс $\pi^0\pi^0$ -систем до 3000 МэВ, наблюдение и обоснование серии скалярных $\pi^0\pi^0$ -резонансов, $f_0(980)$, $f_0(1300)$, $f_0(1500)$ и $f_0(2010)$, проявляющихся в деструктивной интерференции с нерезонансным фоном, измерение сечений рождения этих резонансов. В целом, это приоритетный результат.
- Парциально-волновой анализ реакции $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$ в области масс $\eta\pi^0$ -систем до 2500 МэВ, обоснование критерия выбора физического реше-

ния, наблюдение серии резонансов в системе $\eta\pi^0$, включая $a_0(980)$ -, $a_0(1300)$ -, $a_2(1320)$ -, $a_4(2040)$ -мезоны, измерение сечений образования указанных резонансов и дифференциального сечения рождения $a_0(980)$ -мезона.

- Парциально-волновой анализ методом Земаха $\eta\pi^0\pi^0$ -систем, образующихся в зарядообменных π^-p -взаимодействиях при импульсе 100 ГэВ/с, идентификация резонансов $\eta(1295)$, $\iota/\eta(1440)$, $f_1(1285)$ и $f_1(1420)$, измерение сечений их образования в этой реакции, а также относительных вероятностей распадов указанных резонансов по $a_0(980)\pi^0$ - и $f_0(980)\eta$ -каналам.
- Феноменологический анализ спин-четности $4\pi^0$ -систем, образующихся в реакции $\pi^-p \rightarrow 4\pi^0n$ при импульсах 38 ГэВ/с и 100 ГэВ/с, измерение сечений рождения $f_2(1270)$ - и $f_2(1810)$ -мезонов, а также их относительных вероятностей распада по $4\pi^0$ -каналу. Указанные измерения проведены впервые.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Юрию Дмитриевичу Прокошкину - соавтору большинства работ, вошедших в настоящую диссертацию, за плодотворное тесное сотрудничество на протяжении многих лет. При этом многие работы были инициированы лично Юрием Дмитриевичем. Особо следует отметить ценность его весьма неординарных подходов к решению целого ряда неизбежно возникавших проблем на самых разных этапах проведенных исследований.

Самые теплые слова благодарности автор выражает Владимиру Федоровичу Образцову за совместную работу, многочисленные полезные обсуждения многих, из затронутых в диссертации, вопросов, а также за поддержку зачастую нетривиальных результатов исследований и стимулирование написания настоящей диссертационной работы.

Автор очень благодарен своим коллегам - участникам программы ГАМС: С.В. Донскову, А.В.Инякину, Д.Б.Какауридзе, В.А.Качанову, А.А.Кондашо-

ву, В.Н. Колосову, А.В.Кулику, Г.Л.Ландсбергу, А.А.Ледневу, В.А.Лишину, Ю.В.Михайлову, С.А.Половникову, Ю.В.Роднову, В.Д.Самойленко, А.В.Синьговскому, А.Е.Соболю, В.П.Сугоняеву, Г.В.Хаустову, П.М.Шагину и А.В.Штанникову, - за плодотворную совместную работу и сотрудничество на протяжении более 25 лет.

Автор весьма признателен также иностранным коллегам - участникам программы ГАМС: Д.Алди, Ф.Г.Бинону, К.Брикман, М.Бутмеру, М.Гуанэр, С.Инаба, Т.Кинаши, М.Кобаяши, Ж.П.Ланье, Т.Мутью, Т.Накамура, Э.А.Нап, Ж.П.Пенье, Ж.П.Строту, М.Пуле, К.Такаматсу, Т.Тсуру, за взаимообогащающее сотрудничество в рамках совместных экспериментов в ИФВЭ и ЦЕРН.

Литература

1. А.В.Кулик, А.А.Леднев, С.А.Садовский, А.В.Синьговский, Г.В.Хаустов, *Определение энергий и координат γ -квантов в годоскопическом черенковском спектрометре ГАМС-2000*, - Препринт ИФВЭ 85-17, Серпухов, 1985.
2. М.Ю.Боголюбский, С.В.Ерин, М.О.Лобанов, П.Мартиненго, Н.Г.Минаев, Ф.Пиуз, С.А.Садовский, Ю.В.Харлов, *Методы реконструкции координат в газовых детекторах с катодным считыванием данных*, ПТЭ, 2002, N3, с. 39-53.
3. M.Yu.Bogolyubsky, Yu.V.Kharlov, S.A.Sadovsky, *Direct photon identification with artificial neural network in the photon spectrometer PHOS*, Nucl. Instr. Meth. A502 (2003) 719-722.
4. С.А.Садовский, *Банк реальных фотонных ливней для моделирования событий в годоскопическом спектрометре ГАМС-2000*, - Препринт ИФВЭ 85-34, Серпухов, 1985.
5. A.A.Kondashov, S.A.Sadovsky, V.D.Samoylenko, *Fourier parametrization of the multi-dimentional Monte Carlo efficiency*, Preprint IHEP 91-167, Protvino, 1991.
6. A.A.Kondashov, S.A.Sadovsky, V.D.Samoylenko, *Fourier parametrization of the multi-dimentional Monte Carlo efficiency*, XXVI Intern. Conf. on High Energy Physics, Dallas, 1992, Presented by S.A.Sadovsky; Proc. XXVI Intern. Conf. on High Energy Physics, Dallas, v2 (1992) 1791-1794.
7. S.A.Sadovsky, A.E Sobol, *Fourier analysis of the multi-dimensional distributions*, Presented by S.A.Sadovsky, Proc. Third Intern. Workshop on

Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High Energy and Nuclear Physics, Oberammergau, 1993, 639-644.

8. С.А.Садовский, *О выборе функционала минимизации в парциально-волновом анализе*, ДАН 319 (1991) 165-169.
9. S.A.Sadovsky, *On the ambiguities in partial wave analysis of $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$ reaction*, Preprint IHEP 91-75, Protvino, 1991.
10. S.A.Sadovsky, *Ambiguity of the Partial Wave Analysis of the Reaction $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$* , Phys. Atom. Nucl. 62 (1999) 519-521.
11. D.Alde, F.G.Binon, M.Boutemur, C.Bricman, S.V.Donskov, M.Gouanere, A.V.Inyakin, S.Inaba, V.A.Kachanov, G.V.Khaustov, E.A.Knapp, A.A.Kondashov, A.A.Lednev, V.A.Lishin, J.P.Peigneux, M.Poulet, Yu.D.Prokoshkin, S.A.Sadovsky, V.D.Samoylenko, P.M.Shagin, A.V.Singovsky, J.P.Stroot, V.P.Sugonyaev, K.Takamatsu, T.Tsuru, *Study of the $\pi^0\pi^0$ system with the GAMS-4000 spectrometer at 100 GeV/c*, Eur. Phys. J., A3 (1998) 361-371.
12. Ю.Д.Прокошкин, С.А.Садовский, *О неоднозначности решений в парциально-волновом анализе реакции $\pi^-p \rightarrow \eta\pi^0n$* , ДАН 323 (1992) 486-489.
13. D.Alde, F.G.Binon, M.Boutemur, C.Bricman, S.V.Donskov, M.Gouanere, A.V.Inyakin, S.Inaba, V.A.Kachanov, G.V.Khaustov, E.A.Knapp, A.A.Kondashov, A.A.Lednev, V.A.Lishin, J.P.Peigneux, M.Poulet, Yu.D.Prokoshkin, S.A.Sadovsky, V.D.Samoylenko, P.M.Shagin, A.V.Singovsky, J.P.Stroot, V.P.Sugonyaev, K.Takamatsu, T.Tsuru, *Study of the $\pi^0\pi^0$ system at 100 GeV/c*, Presented by S.A.Sadovsky at 7th Intern. Conf. on Hadron Spectroscopy HADRON'97, BNL, 25-30 August 1997, Proc. 432, p.547, 1997.
14. S.A.Sadovsky, *The $2\pi^0$ and $4\pi^0$ systems from GAMS-2000*, Proc. Third

- Workshop on Light Quark Meson Spectroscopy, KEK proceedings 92-8, Tsukuba (1992) 87-100.
15. Ю.Д.Прокошкин, С.А.Садовский, *Исследование точности парциально-волнового анализа $\eta\pi^0$ -системы методом Монте-Карло*, ЯФ 58 (1995) 921-930.
 16. A.A.Kondashov, Yu.D.Prokoshkin, S.A.Sadovsky, *Recent GAMS results on the $\pi^0\pi^0$ -system produced in 38 GeV/c π^-p charge exchange reaction*, Proc. 28th Intern. Conf. on High Energy Physics, Warsaw, 1996, pp. 474-477.
 17. Ю.Д.Прокошкин, А.А.Кондашов, С.А.Садовский, *Данные о $\pi^0\pi^0$ -системе, образующейся в зарядообменной π^-p -реакции при импульсе 38 ГэВ/с*, ДАН 353 (1997) 323-326.
 18. Ю.Д.Прокошкин, С.А.Садовский, *Анализ D-волны в реакции $\pi^-p \rightarrow a_2^0(1320)n$* , ЯФ 58 (1995) 662-668.
 19. Yu.D.Prokoshkin, S.A.Sadovsky, A.E.Sobol, *Observation of a spin-4 meson decaying into $\eta\pi^0$* , presented by S.A.Sadovsky at Sixth Intern. Conf. on Hadron Spectroscopy HADRON'95; Proc. HADRON'95, Manchester, 1995, pp. 445-447.
 20. Yu.D.Prokoshkin, S.A.Sadovsky, A.E.Sobol, *$a_4^0(2010)$ meson decaying into $\eta\pi^0$* , Proc. Third Intern. Conf. on Nucleon-Antinucleon Physics NAN'95, Moscow 1995, Phys. Atom. Nucl. 59 (1996) 1392-1394.
 21. Д.Алди, Ф.Бинон, К.Брикман, М.Бутмер, М.Гуанер, С.В.Донсков, С.Инаба, А.В.Инякин, В.А.Качанов, Т.Кинаши, М.Кобаяши, В.Н.Колосов, А.А.Кондашов, А.В.Кулик, Г.Л.Ландсберг, А.А.Леднев, В.А.Лишин, Ю.Д.Прокошкин, М.Пуле, С.А.Садовский, В.Д.Самойленко, А.В.Синьговский, А.Е.Соболь, Ж.-П.Строот, В.П.Сугоняев, К.Такаматсу, Т.Тсуру, Г.В.Хаустов, П.М.Шагин, А.В.Штанников, *Наблюдение a_4^0 -мезона в канале распада $\eta\pi^0$* , ЯФ 59 (1996) 1027-1035.

22. D.Alde, F.G.Binon, M.Boutemur, C.Bricman, S.V.Donskov, M.Gouanere, A.V.Inyakin, S.Inaba, V.A.Kachanov, G.V.Khaustov, E.A.Knapp, A.A.Kondashov, A.A.Lednev, V.A.Lishin, J.P.Peigneux, M.Poulet, Yu.D.Prokoshkin, S.A.Sadovsky, V.D.Samoylenko, P.M.Shagin, A.V.Singovsky, J.P.Stroot, V.P.Sugonyaev, K.Takamatsu, T.Tsuru, *Study of the $\eta\pi^0$ system in the mass range upto 1200 MeV*, Presented by S.A.Sadovsky at 7th Intern. Conf. on Hadron Spectroscopy HADRON'97, BNL, 25-30 August 1997, Upton, 1997, pp. 774-777.
23. Yu.D.Prokoshkin, S.A.Sadovsky, *A study of E/ι region in the $\eta\pi^0\pi^0$ decay channel with GAMS-4000 spectrometer*, Proc. Fourth Biennial Conf. on Low Energy Antiproton Physics LEAP'96, Dinkelsbuhl, Nucl. Phys. B 56A (1997) 222-226.
24. Д.Алди, Ф.Бион, К.Брикман, М.Бутмер, М.Гуанер, С.В.Донсков, С.Инаба, А.В.Инякин, В.А.Качанов, Т.Кинаши, М.Кобаяши, А.В.Кулик, А.А.Леднев, Т.Накамура, Э.А.Напп, Ж.-П.Пенье, С.А.Половников, Ю.Д.Прокошкин, М.Пуле, С.А.Садовский, В.Д.Самойленко, А.В.Синьговский, Ж.-П.Строот, В.П.Сугоняев, К.Такаматсу, Т.Тсуру, Г.В.Хаустов, П.М.Шагин, А.В.Штанников, *Анализ спин-четности $\eta\pi^0\pi^0$ -системы в зарядовообменной π^-p -реакции при импульсе 100 ГэВ/с методом Земаха*, ЯФ 60 (1997) 458-463.
25. Ю.Д.Прокошкин, С.А.Садовский, *Изучение $\eta\pi^0\pi^0$ -системы в области масс E/ι -мезона при помощи спектрометра ГАМС-4000*, ДАН 354 (1997) 751.
26. S.A.Sadovsky, *New GAMS results on meson spectroscopy*, Proc. Second Biennial Workshop on Nucleon-Antinucleon Physics - NAN'93, Moscow 1993, Phys. Atom. Nucl. 57 (1994) 1600-1609.
27. S.A.Sadovsky, *Comments to the partial wave analysis of the $\eta\pi$ system produced in peripheral πp -interactions*, Nucl. Phys. A655 (1999) 131c-136c.

28. Д.Алди, Ф.Бинон, К.Брикман, М.Гуанэр, С.В.Донсков, А.В.Инякин, В.А.Качанов, Д.Б.Какауридзе, А.В.Кулик, Ж.-П.Ланье, А.А.Леднев, Ю.В.Михайлов, Т.Мутьюи, Э.А.Нап, В.Ф.Образцов, Ж.-П.Пенье, Ю.Д.Прокошкин, Ю.В.Роднов, С.А.Садовский, В.Д.Самойленко, А.В.Синьговский, Ж.-П.Строот, В.П.Сугоняев, Г.В.Хаустов, П.М.Шагин, А.В.Штанников, *Нейтральные мезоны, распадающиеся по каналу $4\pi^0$* , ЯФ 47 (1988) 997.
29. D.Alde, F.G.Binon, C.Bricman, S.V.Donskov, M.Gouanere, A.V.Inakin, V.A.Kachanov, D.B.Kakauridze, G.V.Khaustov, E.A.Knapp, A.V.Kulik, J.P.Lagnaux, A.A.Lednev, Yu.V.Mikhailov, T.Mouthuy, V.F.Obtaztsov, J.P.Peigneux, Yu.D.Prokoshkin, Yu.V.Rodnov, S.A.Sadovsky, V.D.Samoylenko, P.M.Shagin, A.V.Shtannikov, A.V.Singovsky, J.P.Stroot, V.P.Sugonyaev, *Neutral Mesons which decay into $4\pi^0$* , Phys. Lett. B198 (1987) 286.
30. Г.А.Акопджанов, Ф.Бинон, К.Брикман и др. *Исследование зарядовообменных реакций при малых переданных импульсах*, Препринт ИФВЭ, ПЭФ 77-3, Серпухов, 1977.
31. Г.А.Акопджанов, Ю.М.Антипов, Ф.Бинон и др. *Исследование эксклюзивных π^-p — взаимодействий с нейтральными мезонными конечными состояниями*, Предварительное предложение, ИФВЭ, Серпухов, 1977.
32. F.G.Binon, C.Bricman, Yu.V.Bushnin et al., *Study of π^-p — interactions with neutral final states*, Experiments at CERN, NA12, Geneva, August 1979.
33. Ю.Д.Прокошкин, *Эксклюзивное образование и распад глюболов*, ЭЧАЯ, 16 (1985) 584.
34. Ю.Д.Прокошкин, *Экспериментальные исследования на 70 ГэВ ускорителе ИФВЭ (1963-1983 г., электронная методика)*, ЭЧАЯ 18 (1987) 503.

35. F.Binon et al., *Hodoscope gamma spectrometer GAMS-200*, Nucl. Instr. Meth, 188 (1981) 507.
36. F.Binon, V.M.Buyanov, S.V.Donskov et al., *Hodoscope multiphoton spectrometer GAMS-2000*, Nucl. Instr. Meth. A248 (1986) 86.
37. D.Alde, F.Binon, D.Boget et al., *Acquisition system for the hodoscope spectrometer GAMS-4000*, Nucl. Instr. Meth. A240 (1985) 343.
38. S.I.Bityukov et al., Phys. Lett. B268 (1991) 137.
39. The COMPASS Collaboration, *COMPASS, a proposal for a Common Muon and Proton Apparatus for Structure and Spectroscopy*, CERN/SPSLC/96-14, 1 March 1996.
40. ALICE Collaboration, *Technical Proposal*, CERN/LHCC/95-71, Geneva, 1995.
41. G.Dellacasa, L.Ramello, E.Scalas et al., *ALICE Technical Design Report of the Photon Spectrometer (PHOS)*, CERN/LHCC 99-4, ALICE TDR 2, 5 March 1999.
42. CMS Collaboration, *The Electromagnetic calorimeter Technical Design Report*, CERN/LHCC 1997-33 (1997).
43. F.Binon et al., Z. Phys. C9 (1981) 109.
44. Ю.Д.Прокошкин, *Экспериментальное исследование глюонных взаимодействий и образования глюболов в центральной области соударения адронов при энергиях 500-3000 ГэВ на УНК*, Препринт ИФВЭ 88-40, ОЭФ, Серпухов, 1988.
45. D.Alde et al. Nucl. Phys. B269 (1986) 485.
46. Experiments at CERN in 1984, p.89, CERN, Geneva, November 1984.

47. С.А.Садовский, диссертация на соискание ученой степени кандидата физ. мат. наук, *Изучение нейтральных распадов η -мезона на установке ГАМС-2000*, Протвино, 1986 г.
48. G.A.Korn and T.M.Korn T.M., *Mathematical Handbook for scientists and engineers*, McGraw-Hill Book Company, 1968;
Г.Корн, Т.Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, М., Наука, 1974.
49. G.A.Akopdzhanov et al., Nucl. Instr. Meth. 140 (1977) 441.
50. F.Binon et al., Nucl. Instr. Meth. 188 (1981) 507.
51. A.A.Lednev, *Electron shower transverse profile measurement*, Nucl. Instr. Meth. A366 (1995) 292-297.
52. Б.Н.Пшеничный, *Метод линеаризации*, М. Наука, 1983.
53. С.И.Битюков, С.А.Садовский, В.К.Семенов, В.В.Смирнова, *Определение параметров ливней в годоскопических калориметрах методом моментов*, Препринт ИФВЭ 81-45, Серпухов, 1981.
54. A.A.Lednev, Preprint IHEP 93-153, December 1993.
55. A.A.Lednev, Instrum. Exp. Tech., 54 (2011) 756.
56. L.Lonnblad, C.Peterson, T.Rognvalson, Comput. Phys. Commun. 70 (1992);
C.Peterson, T.Rognvalson, L.Lonnblad, Preprint LU-93-29, 1993;
Preprint CERN-TH 7315/94, Geneva, 1994.
57. V.Blobel, *Formulae and Methods in Experimental Data Evaluations*, Vol.3, EPS, CERN, 1984, p. 11.
58. Ф.Бинон и др., ЯФ 33 (1981) 1244.
59. Д.Алди и др., ЯФ 45 (1987) 117.
60. F.Binon at al., Phys. Lett. 140B (1984) 264.

61. W.T. Eadie et al., *Statistical Methods in Experimental Physics*, Noth-Holl. Publ. Comp. Amsterdam-London, 1971.
62. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М. 1986.
63. В.Я.Арсенин, ДАН СССР, Сер. матем. физика, 183 (1968) 257.
64. R.Brun, M.Hansroul, H.Wind - Preprint CERN/DD/EE 80-1; MUDIFI, E999, CERN Program Library, 1985.
65. M.M.Aggarwal et al., Eur.Phys.J. C23 (2002) 225-236.
66. K.Ackermann et al., *STAR detector overview*, Nucl.Instr.Meth. A499 (2003) 624-632.
67. W.Erni et al, *Technical Design Report for PANDA Electromagnetic Calorimeter (EMC)*, Oct 2008. 199 pp.
68. М.Ю.Боголюбский и др., ПТЭ №5 (2011) 88-92.
69. ALICE Collaboration, Eur. Phys. J. C (2014) 74-3108.
70. М.Ю.Боголюбский и др., ЯФ 76 (2013) 1389-1403.
71. J.L.Petersen, *The $\pi\pi$ interaction*, CERN 77-04, 14 February 1977.
72. G.Costa et al., Nucl. Phys. B175 (1980) 402.
73. S.U.Chung, *Amplitude Analysis of two-pseudoscalar systems*, Preprint BNL-QGS-95-41, May 31, 1995; S.U.Chung, Phys. Rev., D56 (1997) 7299.
74. A.Gersten, Nucl. Phys., B12 (1969) 537.
75. E.Barrelet, Nouvo Cim., 8A (1972) 331.
76. D.Alde et al., Phys. Lett., B205 (1988) 397.
77. M.Boutemeur, Ph.D. Thesis, LAPP, Annecy - le Vieux, 1988.

78. D.Cohen et al., Phys. Rev., D22 (1980) 2595.
79. CERN Program Library, *MINUIT (long writeup)*, CERN Program Library, D506, p.95, Geneva, 1987.
80. M.Boutemeur, M.Poulet M., Proc. 3rd Intern. Conf. on Hadron Spectroscopy, HADRON'89, p. 119, Ajaccio, 1989.
81. Б.В.Болонкин и др., ЯФ 46. (1987) 451; 46 (1987) 799; Nucl. Phys. B309 (1988) 426.
82. G.Grayer et al., Nucl. Phys. B75 (1974) 189.
83. J.D.Hansen et al., Nucl. Phys. B81 (1974) 403.
84. W.D.Apel et al., Nucl. Phys. B193 (1981) 269; ЯФ 41 (1985) 126.
85. W.D.Apel et al., Nucl. Phys. B201 (1982) 197;
В.Д.Апель и др. ЯФ 41 (1985) 347.
86. Ф.Бинон и др., ЯФ 38 (1983) 1199.
87. F.Binon et al., Lett. Nuovo. Cim. 39 (1984) 41.
88. F.Binon et al., Nuovo. Cim. 71A (1982) 497.
89. M.J.Corden et al., Nucl. Phys. B138 (1978) 235.
90. W.D.Apel et al. Nucl. Phys. B152 (1979) 1.
91. O.I.Dahl et al. Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 80.
92. L.Montanet et al. (*Particle Data Group*), Phys. Rev. D50 (1994) 1.
93. В.Н.Болотов и др., ЯФ 20 (1974) 1214.
94. W.Ochs, F.Wagner, Phys. Lett. B44 (1973) 271.
95. N.M.Cason et al. Phys. Rev D28 (1983) 1586.
96. Ю.Д.Прокошкин, А.А.Кондашов, С.А.Садовский, ДАН 342 (1995) 473.

97. D.Alde, F.G.Binon, M.Boutemer et al., *Z.Phys.* C66 (1995) 375-378.
98. Ю.Д.Прокошкин, А.А.Кондашов, *ДАН* 336 (1994) 613.
99. M.Svec, *Phys. Rev. D* 53 (1996) 2343.
100. J.Blatt, W.Weiskopf, *Theoretical nuclear physics*, Wiley, 1952, p.359.
101. Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, *Phys. Rev. D*52 (1996) 1.
102. C.Caso et al., *Review of Particle Physics*, *The European Physical Journal*, C3 (1998) 1.
103. N.N.Achasov and G.N.Shestakov, Препринт ТФ-№ 19 (189), Новосибирск 1991; *Modern Phys. Lett., A*, Vol.8, № 25 (1993) 2343-2350.
104. P.D.B.Collins, *Introduction to Regge theory and high energy physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1977.
105. M.J.Emms et al., *Phys. Lett.* B59 (1975) 177.
106. M.Boutemer, J.P.Peigneux, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* B21 (1991) 159.
107. A.Austregesilo, XV International Conference on Hadron Spectroscopy, 4-8/11/2013, Nara, Japan, arXiv: 1402.2170v1 [hep-ex] 10 Feb 2014.
108. C.W.Salgado and D.P.Weygand, *Phys. Rept.* 537 (2014) 1-58.
109. A.Austregesilo, T.Schluter, Sixth, International Conference on Quarks and Nuclear Physics, April 16-20, 2012, Ecole Polytechnique, Palaiseau, Paris.
110. N.N.Achasov and G.N.Shestakov, *Phys.Usp.* 54 (2011) 799-828.
111. A.Lednev, Int. Conf Hadron'97, Upton, NY, AIP Conf. Proc. 432 (1997) 253.
112. A.R.Dzierba et al., *Phys. Rev. D*67 (2003) 094015.

113. Nils.A.Tornqvist, *Current problems in light meson spectroscopy*, IXth International Conference on the Problem of Quantum Field Theory, Dubna, USSR, 24-28 April 1990.
114. N.N.Achasov, *Exotic Mesons 1990*, Sankt Goar, Germany. Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B21 (1991) 189.
115. S.F.Tuan et al., Phys. Lett., B213 (1988) 537.
116. A.Zaitsev, Int. Conf. HADRON'97, Upton, NY, AIP Conf. Proc. 432, p.461, 1997.
117. R.L.Jaffe, Phys. Rev. D15 (1977) 267, 281.
118. L.Montanet, Rep. Prog. Phys. 46 (1983) 337.
119. F.E.Close, Rep. Prog. Phys. 51 (1988) 833.
120. Н.Н.Ачасов и др., УФН 142 (1984) 361; УФН 161 (1991) 53.
121. Н.Н.Ачасов и др., ЯФ 33 (1981) 1337.
122. N.N.Achasov, G.N.Shestakov, Preprint Tph-No 19(189), Novosibirsk, 1991.
123. N.N.Achasov, G.N.Shestakov, Phys. Rev. D56 (1997) 212.
124. S.Flatte, Phys. Lett. 63B (1976) 224.
125. G.M.Beladidze et al., Phys. Lett. B313 (1993) 276.
126. C.Amsler et al., Phys. Lett. B333 (1994) 277.
127. Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, Eur. Phys. J. C15 (2000) 1.
128. В.Д.Апель и др. ЯФ 31 (1980) 167.
129. M.Boutemeur, J.P.Peigneux, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B21 (1991) 159.
130. H.Aoyagu et al., Phys. Lett. B314 (1993) 246.

131. G.Usai, Int. Conf. HADRON'97, Upton, NY, AIP Conf. Proc. 432, p.108, 1997.
132. D.R.Thompson et al., Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 1630.
133. K.Braune, Proceedings of the Fifth Biennial Conference on Low-Energy Antiproton Physics, Nucl. Phys. A655 (1999) 3c.
134. A.Ando et al., Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 1296;
S.Fukui et al., Phys. Lett. B267 (1991) 293.
135. F.Binon et al., Phys. Lett. B140 (1984) 264.
136. D.Alde et al., Phys. Lett. B177 (1986) 115.
137. D.Alde et al., Proc. Workshop on Hadron Physics at e^+e^- Collider, IHEP, Beijing, 1994, p. 34., ed. X. Fan, W. Li, H. Ni;
T.Tsuru, Preprint KEK 95-158, Tsukuba, 1995.
138. C.Dionisi et al., Nucl. Phys. B169 (1980) 1.
139. Ch.Zemach, Phys. Rev. 133B (1964) 1201.
140. L.Rosselet et al., Phys. Rev. D15 (1977) 574.
141. C.Нyams et al., Nucl. Phys. B64 (1973) 134.
142. Ph. Gavillet, Thesis No. 2147, Orsay, 1979.
143. М.Б.Волошин, Ю.М.Зайцев, УФН 152 (1987) 361.
144. А.И.Вайнштейн и др., ЭЧАЯ 13 (1982) 542.
145. S.S.Gershtein, A.K.Likhoded, Yu.D.Prokoshkin, Z.Phys. C24 (1984) 305.
146. W.D.Apel et al., Phys. Lett. B83 (1979) 131; Nucl. Phys. B152 (1979) 1.
147. S.Narison, G.Veneziano, Intern. Journ. Mod. Phys. A4 (1989) 2751
148. J.Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev D86 (2012) 1.

149. С.С.Герштейн, А.К.Лиходед, Ю.Д.Прокошкин, ЯФ 39 (1984) 251.
150. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, 6-е издание, 2004 г.
151. А.М.Балдин, В.И.Гольданский, И.Л.Розенталь, *Кинематика ядерных реакций*, ФМ, Москва 1959
152. Ф.Бинон и др. ЯФ 38 (1983) 934.
153. Д.Алди и др. ЯФ 44 (1986) 120;
D.Alde et al., Nucl. Phys. B269 (1986) 485.
154. F.Binon et al., Nuovo Cim. 80A (1984) 363.
155. D.Alde et al., Phys. Lett B177 (1986) 115.
156. J.Gunter et al. Phys. Rev. D64 (2001) 072003.
157. D.Barberis et al., Phys. Lett. B453 (1999) 305.
158. <http://inspirehep.net/info/general/project/index>
159. E.Klempf, A.Zaitsev, Phys. Rept. 454 (2007) 1-202.
160. В.В.Анисович и др. ЯФ 63 (2000) 1410.
161. F.Binon et al., Nuovo Cim. A78 (1983) 313.
162. D.Barberis et al., Phys. Lett. B453 (1999) 325.
163. Long Li, Bing-Song Zou, Guang-lie Li, Phys. Rev. D63 (2001) 074003.
164. D.Barberis et al., Phys. Lett. B474 (2000) 423-426.
165. D.Barberis et al., Phys. Lett. B471 (2000) 440-448.
166. I.Uman et al., Phys. Rev. D73 (2006) 052009.
167. V.Crede and C.A.Meyer, Prog. Part. Nucl. Phys. 63 (2009) 74-116.

168. Yu.D.Prokoshkin, Proc. 3rd Intern. Conf. on Hadron Spectroscopy, HADRON'89, Ajaccio, 1989, p. 27.
169. L.Burakovsky, P.R.Page, Eur. Phys. J. C12 (2000) 489.
170. T.A.Amstrong et al., Phys. Lett. B307 (1993) 394.
171. E. van Beveren and G.Rupp, Eur. Phys. J. C10 (1999) 469.
172. F.Kleefeld et al. Phys. Rev. D66 (2002) 034007.
173. V.V.Anisovich, HADRON-2003, 31 August - 5 September 2003, Aschaffensburg, Germany.
174. Н.Н.Ачасов, Г.Н.Шестаков, ЯФ 62 (1999) 548.
175. В.В.Анисович, УФН 174 (2004) 49.
176. E.Klempt, Proceedings of the PSI Zuoz Summer School, "Phenomenology of Gauge Interactions", hep-ex/0101031, 2000, pp. 61-126.
177. N.N.Achasov, G.N.Shestakov, Phys. Usp. 54 (2011) 799-828.
178. D.V.Bugg, Phys. Rep. 397 (2004) 257.
179. Xue Chao Feng et al., Acta Phys. Polonica, B42 (2011) 25.
180. A.Bertin et al., Phys. Lett. B434 (1998) 180.
181. M.Bargiotti et al., Eur. Phys. J. C26 (2003) 371.
182. C.Adolph et al., CERN Preprint CERN-PH-EP-2014-204, 12 August 2014. Submitted to Phys. Lett. B.
183. C.Amsler et al., Review of Particle Physics, Phys. Lett. B667 (2008) 1.
184. S.Eidelman et al., Review of Particle Physics, Phys. Lett. B592 (2004) 1.
185. C.Amsler, Sixth Intern. Conf. on Hadron Spectroscopy HADRON'95, Proc. HADRON'95, Manchester, 1995, pp. 328-330.

186. D.Barberis et al., Phys. Lett. B440 (1998) 225.
187. W.S.Carvaho et al. Eur. Phys. J. C17 (2000) 173.
188. M.Ablikim et al. Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 072002.
189. P.Braun-Munzinger, B.Friman and J.Stachel, *Quark Matter 2014, XXIV International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions*, Nucl.Phys.A, 931 (2014) 1-1266.
190. R.S.Hayano and T.Hatsuda, Rev. Mod. Phys. Vol. 82, No 4 (2010) 2949.