

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Сапонова Павла Алексеевича “Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей”, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Диссертация Сапонова П.А. посвящена проблемам одного из разделов современной теоретической физики — теории интегрируемых (точно решаемых) систем. К этому разделу относятся исследования разнообразных моделей статистической физики и теории поля, характеристики которых (статистическая сумма, корреляционные функции и т.п.) могут быть найдены точно, без привлечения средств теории возмущений. Сюда же относятся и методы решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, таких, как уравнение Кортевега де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение модели синус-Гордон и других. В диссертации получены результаты, касающиеся математического аппарата теории интегрируемых систем — так называемых квантовых матричных алгебр. Эти алгебры возникли в теории интегрируемых систем как особые квантовые симметрии точно решаемых моделей, а затем приобрели и самостоятельное значение в теории квантовых групп и некоммутативной геометрии. В диссертации подробно рассматривается структура этих алгебр, теория их представлений и построение на их основе дифференциального исчисления на некоммутативном пространстве. В качестве иллюстрации приложений разработанного аппарата к физическим проблемам рассматриваются решения уравнения Клейна-Гордона и уравнения Шредингера для атома водорода в некоммутативном пространстве.

Структура и содержание диссертации. Диссертация состоит из Введения, четырех глав, заключения, двух технических приложений и списка литературы.

Введение содержит краткий исторический обзор, мотивировки исследования, список представленных к защите результатов и краткое описание структуры диссертации.

Первая глава посвящена структурной теории квантовых матричных алгебр, определяемых R -матрицами $GL(m|n)$ типа. Центральным результатом этой главы является доказательство квантового тождества Гамильтона-Кэли, обобщающее известное тождество классического матричного анализа на случай матрицы с некоммутативными элементами. Коэффициентами тождества Гамильтона-Кэли служат

элементы важной коммутативной характеристической подалгебры квантовой матричной алгебры. В диссертации проводится исследование свойств этой подалгебры и строится ее линейный базис, состоящий из квантовых аналогов симметрических функций Шура. Эти функции являются полиномами от генераторов исходной квантовой матричной алгебры и параметризуются всевозможными разбиениями натуральных чисел. Как показано в диссертации, произведения квантовых функций Шура удовлетворяют классическим правилам Литтлвуда-Ричардсона. Кроме того, в первой главе выведены серии так называемых билинейных соотношений на произведения функций Шура, которые обобщают результат А.Кириллова и Н.Решетихина, полученный ранее для функций Шура, параметризованных прямоугольными диаграммами Юнга. Наличие билинейных тождеств позволяет получить факторизованную форму тождества Гамильтона-Кэли, что, в свою очередь, дает возможность инвариантным образом ввести понятие спектра квантовой матрицы и в $GL(m|n)$ случае определить аналоги m “четных” и n “нечетных” собственных значений. Спектральные переменные приводят к удобной параметризации всей характеристической подалгебры и играют важную роль в построении квантовых многообразий.

Во второй главе строится теория конечномерных эквивариантных представлений алгебры уравнения отражений $GL(m|n)$ типа. Центризатором эквивариантных представлений алгебры уравнения отражений являются R -матричные представления алгебры Гекке (q -деформация групповой алгебры симметрической группы), поэтому в начале главы проводится анализ общей формы Геккевской R -матрицы $GL(m|n)$ типа и вводятся некоторые ее характеристики (би-ранг, полюса и нули ряда Пуанкаре и т.п.). Затем строится квазитензорная категория векторных пространств, объекты которой представляют собой конечномерные модули над алгеброй уравнения отражений. Каждый объект (векторное пространство неприводимого представления) параметризуется диаграммой Юнга, а его размерность вычисляется как значение соответствующей функции Шура, параметризованной спектром квантовой матрицы, при специализации “четных” собственных значений в полюсах ряда Пуанкаре, а “нечетных” собственных значений — в нулях ряда Пуанкаре R -матрицы, задающей алгебру уравнения отражений.

Существенной проблемой оказывается определение структуры представления на тензорном произведении двух модулей. Эта проблема проистекает от того, что в алгебре уравнения отражений довольно сложно устроена процедура коумножения, что и является причиной квазитензорного характера категории конечномерных модулей. В диссертации приводится полное решение этой проблемы и вы-

водится явная формула для вычисления операторов, представляющих элементы алгебры уравнения отражений в тензорном произведении двух заданных модулей. Завершается глава вычислением спектра центральных элементов алгебры в некоторых неприводимых представлениях, а также разбирается вопрос так называемой sl -редукции — построения представлений фактор-алгебры исходной алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному квантовым следом матрицы генераторов.

Третья глава посвящена приложению алгебры уравнения отражений к построению некоммутативной геометрии. В первой части главы проводится подробный анализ квазиклассической структуры алгебры уравнения отражений, задаваемого R -матрицей $GL(m)$ типа. Показывается, что эта алгебра может трактоваться как квантование коммутативной алгебры регулярных функций на матричной алгебре $\text{Mat}_m(\mathbb{C})$ — комплекснозначных матриц размера $m \times m$, изоморфной алгебре Ли $gl(m)$. Причем это квантование — двухпараметрическое, отвечающее пучку согласованных скобок Пуассона. Одна из этих скобок — обычная линейная скобка Пуассона-Ли, а вторая — квадратичная пуассонова структура, введенная М.Семеновым-Тянь-Шанским. Обе эти скобки ограничиваются на орбиты коприсоединенного действия группы $GL(m)$ на пространстве $gl^*(m)$.

В диссертации рассматривается вопрос квантования полупростых орбит. Как известно, каждая такая орбита задается некоторой диагональной матрицей: $M = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_m]$. Вначале рассматривается случай орбиты общего положения, когда все собственные значения этой диагональной матрицы попарно различны. Квантование алгебры функций на этой орбите дается фактор-алгеброй алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному полиномиальными соотношениями на центральные элементы алгебры.

Если же полупростая орбита не общего положения (имеются кратные собственные значения), то структура фактор-алгебры усложняется. Идеал, по которому вычисляется фактор, содержит матричные элементы минимального полинома квантовой матрицы, а с каждым кратным собственным значением связывается последовательность чисел (длина которой равна соответствующей кратности), которые все участвуют в построении полиномиальных соотношений, порождающих соответствующий идеал.

Стоит подчеркнуть очевидные преимущества предложенного в диссертации подхода. Во-первых, он максимально приближен к схеме обычной алгебраической геометрии, поскольку квантовая орбита определяется конечным набором некоторых полиномиальных соотношений. Во-вторых, в данном подходе можно дока-

зывать плоскость квантовой деформации, то есть, равенство размерностей однородных компонент квантованной алгебры функций и размерностей однородных компонент классической алгебры функций.

Четвертая глава посвящена построению алгебры квантованных векторных полей и частных производных на алгебре уравнения отражений, трактуемой как алгебра квантовых функций на $gl^*(m)$. Ключевыми требованиями является инвариантность алгебры относительно (ко)действия РТТ алгебры и плоскость деформации. Рассматривается конструкция инвариантных дифференциальных операторов, ограничение всего исчисления на квантованные орбиты, а также вводятся понятия квантового радиуса и радиальной части оператора Лапласа. Эти понятия позволяют обобщить на некоммутативное пространство некоторые модели теоретической и математической физики, такие как уравнения Шредингера в центральном поле, уравнения Клейна-Гордона и Максвелла для свободного поля.

Заключение содержит краткий обзор полученных результатов и обсуждение некоторых перспектив и нерешенных проблем.

Новизна и достоверность результатов. Результаты диссертации изложены в 14 основных работах автора, опубликованных в российских и зарубежных реферируемых журналах. Все эти журналы входят в список, одобренный ВАК. Помимо этого, автор неоднократно докладывал результаты диссертации на международных семинарах в Протвино, Дубне, Черногоровке, Марселе, а также в университете Валансьена, Лилля (Франция), на семинарах математического института общества им. Макса Планка (Бонн), и в институте им. Миттаг-Лефлера в Стокгольме. Таким образом, представленные к защите результаты прошли широкую апробацию в научном сообществе, что подтверждает их новизну и высокий научных уровень.

Общая оценка работы и замечания. Диссертационная работа П.А. Сапонова написана ясно и последовательно, представленные результаты сформулированы и доказаны достаточно подробно и полно. Все результаты получены автором лично, либо при его решающем участии. Однако необходимо отметить и некоторые замечания.

1. В части, касающейся теории представлений автором вычислены характеры центральных элементов алгебры уравнения отражений в некоторых специальных конечномерных представлениях, отвечающих однострочным и одно-столбцовым диаграммам Юнга. Однако для пространств, отвечающих другим диаграммам, данный расчет не проведен. Для полноты построенной тео-


рии представлений было бы интересно привести соответствующие формулы или прокомментировать их отсутствие.

2. В некоторых местах диссертации (например, в разделе, посвященном структуре характеристической подалгебры и тождеству Гамильтона-Кэли) используются переусложненные обозначения, которые затрудняют восприятие формул. Текст диссертации сильно бы выиграл в плане удобства чтения, если бы автор усовершенствовал и упростил используемые символы.

Отмеченные выше недостатки не влияют на качество представленных результатов и не снижают общий научный уровень диссертации. Автореферат диссертации адекватно и достаточно полно отражает ее содержание. Тема диссертации соответствует научной специальности 01.04.02 — теоретическая физика.

Считаю, что диссертационная работа Сапонова П.А. “Квантовые симметрии фундаментальных физических моделей” отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика, а её автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 - теоретическая физика.

Силаев Петр Константинович
доктор физико-математических наук
по специальности 01.04.02 – теоретическая физика,
профессор кафедры квантовой теории и физики
высоких энергий физического факультета
Московского государственного университета
имени М.В.Ломоносова


07.09.2015

подпись Силаева П.К. заверяю

Декан
физического факультета МГУ
профессор



Н.Н.Сысоев